L.KAYRIDINE JANOURA
MR : AMMAR BOUAJILA
GSM :92 741 567

ARITHMETIQUE

$4^{ème}$ MATHS | SERIE N°13

EXERCICE 1

On se propose de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$. On raisonne par l'absurde en envisageant la liste $\{ p_1.p_2........p_n \}$ de tous les nombres premiers congrus à 3 modulo 4. On pose ensuite $M = 4p_1.p_2........p_n - 1$

1.Pourquoi M n'est-il pas premier ?

2.A t-on : $2/M$?

3.Pourquoi M possède-t-il au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4

4.Soit p un tel diviseur de M . Pourquoi a-t-on : $p > p_n$?

5.Conlure.

EXERCICE 2

On rappel le petit théorème de Fermat suivant :

si p est un nombre premier qui ne divise pas l'entier a ,alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

Partie A

1.(a) Prouver que 29 est un nombre premier.

(b) Soit x IN et n un entier tel que $n \equiv 1[28]$. , prouver que $x^n \equiv x[29]$.

2. On considère l'équation (E) : $17x - 28y = 1$ où $(x, y) \in Z^2$.

(a) Quel théorème permet d'affirmer que (E) admet au moins un couple solution d'entiers relatifs ?

(b)En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution.

Partie B.

Soit $A = \{x \in \mathbb{N},\ x < 29\} = \{0;1;2;\dots;28\}$.

Pour $x \in A$,on note $\mathbf{f}(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $g(x)$le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

1.(a)Prouver que $\mathbf{f}(x) \in A$ et $x^{17} \equiv \mathbf{f}(x)[29]$.

On admettra (la démonstration est analogue) que $g(x) \in A$ et $x^5 \equiv g(x)[29]$.

(b)Pour $x \in A$, prouver que $g[f(x)] = x$.

2.Applications :

On attribue à chaque lettre de l'alphabet et aux signes ´ + ˇ et ´ – ˇ, l'entier donné par le tableau ci-dessous

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	+	–
15	16	17	1	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Jasszer code le mot « GAUSS » à l'aide de la fonction f et envoie le message codé à Bassem. Voici le codage des deux premières lettres « G » et « A » :

Message	G	*A*
Entier associé	7	*1*
Utilisation	$7^{17} \equiv 24[29]$	$1^{17} \equiv 1[29]$
Message codé	X	A

(a) Compléter son message.

(b) Bassem reçoit le message suivant, codé par Jasser, à l'aide de la fonction f :

J	I	L	L	R

Décrypter ce message à la place de Bassem.

EXERCICE 3

1. On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour PGCD 1999.

2.On considère l'équation

$$(E) : n^2 - S.n + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

(a)Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

(b)Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.

(c)Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994.
En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1.(a)Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

(b)Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?
Montrer que a_n et c_n sont divisible par 3.

(c)Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que $b_3$est premier.

(d)Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire le décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

(e)Montrer que PGCD (b_n, c_n) = PGCD$(c_n, 2)$.
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2.On considère l'équation (1) $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y (a)Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

(b)Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres $c3$ et $b3$; en déduire une solution particulière de (1).

(c) Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

EXERCICE 5

1.Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2.Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3.Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

(a)Si p = 3n, quel est le reste de la division par 7 ?

(b)Démontrer que si p = 3n + 1 alors A_p est divisible par 7.

(c)Etudier le cas où p = 3n + 2.

4.On considère les nombres entiers a et b écrits dans le systèmes binaire :

$$a = \overline{1001001000}, \quad b = \overline{1000100010000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

EXERCICE 6

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.(a)Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3n par 7

(b)Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

(c) En déduire, le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

(d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par7,pour n quelconque ?

(e)En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7

2. Soit $U_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a)Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

(b)Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

EXERCICE 7

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note $d = PGCD(\alpha,\beta)$.
   (a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   (b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   (c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   (b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

EXERCICE 8

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a + b, ab) = p$, où p premier.
   (a) Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a + b) - ab$).
   (b) En déduire que p divise a. Déduire que p divise b.
   (c) Démontrer que $PGCD(a,b) = p$.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
   (a) Résoudre le système

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}$$

   (b) En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} PGCD(a+b,ab) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}$$

EXERCICE 9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et $d = PGCD(A,B)$.
1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise.
3. Montrerque,tout.diviseur commun de A et B,divise4n.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   (a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   (b) Montrer que d divise n.
   (c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premier entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

(a)Montrer que 4 nedivise pas $n^2 - 2n + 2$.

(b)Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

(c) Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$.

(On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.).

EXERCICE 10

1.Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

2.Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite (u_n).

3.(a)Montrer que la suite (u_n) vérifie, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

(b)Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

(c)En déduire, pour tout entier naturel n, $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

4.Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

(a)Montrerque(v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison.

(b)Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

(c)Déterminer, $\forall n \in \mathbb{N}$ $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$.

EXERCICE 11

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1.(a)Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

(b)En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

(c)Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2.Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3.Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

4.Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = pgcd(a,b).$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

EXERCICE 12

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$

(l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).

On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1.En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, Montrer que pour $n \in IN$ $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste $(n < p)$.
Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

3.Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité $a_m - a_k = 10^k a_{m-k}$

4. Calculer le PGCD de 2001et de 10.

Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5.Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

EXERCICE 13

1.(a)Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$; $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$ et $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$

(b)Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$ Que valent a_1 et b_1 ?

D'après la question 1.(a), donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

3. (a)Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

(b)Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

(c)Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

En déduire quelque soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

EXERCICE 14

1.(a)Montrer que, $\forall n \in N$, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

(b)Montrer que, $\forall n \in N$; $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2.Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\mathrm{PGCD}(a\,;\,b) = \mathrm{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3.Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie:

$$\mathrm{PGCD}\left(3n^3 - 11n\,;\,n+3\right) = \mathrm{PGCD}(48\,;\,n+3).$$

4.(a)Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de

(b)En déduire l'ensemble des entiers naturels *n* tels que

$\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel

EXERCICE 15

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1.(a)Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

(b)En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2.On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

(a)Déterminer a lorsque $a = b$.

(b)Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particuliéres.

(c)Montrer que si (a ; b) est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3.(a)Montrer que si(x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ sont aussi des solutions.

(b)Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions.

4.On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \succ 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier $n \succ 0$, $(a_n ; a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 16

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1 .Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2.Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q

3.Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ; b) vérifiant la relation

$$(E) \quad : \; a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1.Soit X un entier naturel.

(a)Donner dans un tableau,les restes possibles de X modulo9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

(b)Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$

déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$

en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

(c)Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2.Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$.

Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b)

3.On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).

(a)Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

(b)Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant

Partie C

1.Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2.Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3.Cette écriture est-elle unique ?

EXERCICE 17

1.On considère l'équation (E) $109x-226y=1$ où x et y sont des entiers relatifs

(a)Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

(b)Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k,\ 68+109k)$, où k appartient à Z.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226

Et un unique entier naturel non nul e tels que $109d=1+226e$.

(On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2.Démontrer que 227 est un nombre premier.

3.On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions **f** et g de A dans A définies de la manière suivante :

–à tout entier de A, **f** associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

–à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

(a)Vérifier que $g[\mathbf{f}(0)]=0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

(b)Montrer que,quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227].

(c) En utilisant **1.b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a deA. $g[\mathbf{f}(a)]=a$.

Que peut-on dire de $\mathbf{f}\,[(g(a)]=a$?

EXERCICE 18

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier 4^n-1, .

Partie A. Quelques exemples . .

1.Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

.2.Prouver que $4^{28}-1$ est divisible par 29.

3.Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k}-1$ est divisible par 17.

4.Pour quels entiers naturels n le nombre 4^n-1 est-il divisible par 5 ?

5.À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

. Soit *p* un nombre premier différent de 2.

1.Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.

2.Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.

. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

(a)Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r=0$.

(b)Prouver L'équivalence : 4^n-1 est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

. (c)En déduire que b divise $p-1$.