

Exercice n°1 :

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
 - a) 3
 - b) i
 - c) 3+i
- 2) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1+z$ est :
 - a) $1-z$
 - b) $1+\bar{z}$
 - c) $1-\bar{z}$
- 3) Soit z un nombre complexe, $\frac{1}{1+z}$ est égal à :
 - a) $\frac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}$
 - b) $\frac{1-z}{|1+z|^2}$
 - c) $\frac{1}{1-iz}$
- 4) Soit z un nombre complexe. Les vecteurs \vec{v} et \vec{w} d'affixes respectives $z+\bar{z}$ et $z-\bar{z}$ sont :
 - a) Colinéaires
 - b) Orthogonaux
 - c) de même longueur .
- 5) A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' définie par : $z' = \frac{z-4i}{z+2}$. On donne les points A et B d'affixes respectives $4i$ et -2 , on a :
 - a) Pour tout $z \neq -2$; $|z'| = \frac{BM}{AM}$
 - b) pour tout $z \neq -2$ et $z \neq 4i$ $\arg(z') \equiv (\overline{AM}, \overline{BM})(2\pi)$
 - c) Pour tout $z \neq -2$ et $z \neq 4i$ $\arg(z') \equiv (\overline{BM}, \overline{AM})(2\pi)$.
- 6) Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1 . L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :
 - a) La droite (AB)
 - b) le cercle de diamètre [AB]
 - c) La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.
- 7) Soit Ω le point d'affixe $1-i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x+iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ est :
 - a) $y = -x+1$
 - b) $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$
 - c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$.
- 8) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :
 - a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$
 - b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$
 - c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$
- 9) Soit $z = 1 + e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ alors la forme exponentielle de z est :
 - a) $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$
 - b) $-2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$
 - c) $2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
- 10) Le nombre complexe $(1+i)^{10}$ est égale à :
 - a) 32i
 - b) 2i
 - c) -1
- 11) On considère le nombre complexe : $Z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{i\pi}{3}}$. Alors on a :
 - a) $|Z| = 1$
 - b) $Z = -(1-i) e^{\frac{i\pi}{3}}$.
 - c) $Z = e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

Exercice n°2 :

L'exercice comporte trois questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, une seule réponse est exacte.

		A	B	C	D
1	$Z = \frac{2+4i}{2-i}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle trigonométrique.	$Z = \bar{Z}$	Z est un imaginaire pur.	$Z = \frac{2}{3}i$
2	$Z = \sqrt{3} - i$	Un argument de Z est $-\frac{5\pi}{6}$.	Un argument de \bar{Z} est $\frac{\pi}{6}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle de centre O , de rayon $\sqrt{2}$	Le point M d'affixe Z^2 est sur l'axe des ordonnées.
3	z vérifie $\bar{z} + z = 6 + 2i$; l'écriture algébrique de z est :	$\frac{8}{3} - 2i$	$-\frac{8}{3} - 2i$	$\frac{8}{3} + 2i$	$-\frac{8}{3} + 2i$

Exercice n°3 :

Soit $z = (1+i)^n + (1-i)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que z est réel.
- 2) Ecrire sous forme exponentielle $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$
- 3) Déduire la valeur de z .

Exercice n°4 :

Soit $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

- 1) Mettre z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
- 2) En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice n°5 :

On donne $Z_1 = 1+i\sqrt{3}$ et $Z_2 = \sqrt{3}-i$

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexe Z_1 et Z_2 .
- 2) Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique Z_1^{21} .

3) Le plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- Placer les points A, B et C d'affixes respectives Z_1, Z_2 et $Z = Z_1 + Z_2$.
- Montrer que OABC est un carré.
- En déduire le module et un argument de Z.

Exercice n°6 :

Soit $u = (\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})$

- Calculer $z = (1-i)u$.
- Donner la forme exponentielle de z.
- En déduire la forme exponentielle de u.
- Calculer u^{18} et u^{36} .

Exercice n°7 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . A tout $z \in C^*$, on considère les points A, B et C

d'affixes respectives : $z, z_B = \frac{i}{z}$; $z_C = \frac{|z|^2 + i}{z}$

- Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique lorsque $z = 1+i$.
 - Placer dans ce cas les points A, B et C dans le plan P et préciser la nature du triangle ABC.
- Montrer que pour tout $z \in C^*$, on a : OABC est un rectangle.
 - En déduire que OABC est un carré si et seulement si $|z|=1$.
- On pose $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$.
 - Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.
 - Déterminer l'ensemble ζ décrit par C lorsque A décrit le cercle trigonométrique.

Exercice n°8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' définies par : $z' = iz$ et $z'' = z^2$.

- Soit A le point d'affixe $a = 2-i$ et B le point d'affixe $b = 2+i$. On appelle A' et A'' les points associés à A. On appelle B' et B'' les points associés à B.
 - Déterminer sous forme algébrique, les affixes a' et a'' des points A' et A''. Prouver A est le milieu de $[A'A'']$.
 - Déterminer sous forme algébrique, les affixes b' et b'' des points B' et B''.
 - Calculer sous forme algébrique, $\frac{b-b''}{b-b'}$.
 - En déduire la nature du triangle BB'B''.
- M est un point quelconque d'affixe $z \neq 0$. N le point d'affixe \bar{z} . N' et N'' sont les points associés au point N. On pose $z = x+iy$.
 - Prouver que si $z \neq 1$, $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) \equiv \arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) (2\pi)$
 - Montrer alors que M, M' et M'' sont alignés si $y = -x + 1$.

Exercice n°9 :

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, M, M' et M'' d'affixes respectives $i, -i, m, z'$ et z'' avec $z' = -im - 1$ et $z'' = m + i$; $m \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixes m tel que $OM' = OM''$.
- 2) a) On suppose que $|m| = \sqrt{2}$. Montrer que le point M'' appartient à un cercle fixe que l'on précisera.
- 3) b) On suppose que $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$. Montrer alors que le point M' appartient à une demi droite fixe que l'on précisera.
- 4) On suppose dans cette question que $|m| = 1, m \neq i$ et $m \neq -i$
 - a) Vérifier géométriquement que le triangle AMB est rectangle en M .
 - b) En déduire que le nombre complexe $Z = \frac{im+1}{m+i}$ est réel.

Exercice n°10 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit I le point d'affixe 1. On note Γ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω .

- A) On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.
 - 1) Montrer que le point A_0 appartient au cercle Γ .
 - 2) Soit B le point d'affixe b , avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
 - a) Calculer b' .
 - b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B' .
- B) Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M' .

- 1) Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.
- 2) Montrer que $(\overline{M'O}; \overline{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
- 3) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle Γ privé de O et I .

Exercice n°12 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2, z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

- A) 1) a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .
 - b) Placer les points A, B , et C .
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

B) A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.

b) En déduire les points associés aux points B et C .

c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB .

2) a) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

b) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Δ , où Δ est l'ensemble défini à la question 3). de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ .

Exercice n°13 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i, z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2. La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K .

a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b) Calculer la longueur OA . En déduire les longueurs OK et OH .

c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que $z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et

$$z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$.

2) a) Déterminer et placer les points images de B et C par f .

3) b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f .

4) a) Montrer que pour tout point M distinct de O , on a : $OM \times OM' = 4$.

5) b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

6) Soient K' et H' les images respectives de K et H par f .

a) Calculer OK' et OH' .

b) Démontrer que $z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice n°14 :

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives

1 et -2. Soit l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z}-1}{z+2}$.

1) a) Montrer que pour tout $z \neq -2$; $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

2) b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3) Soit α un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi[$, on suppose que $z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\alpha}$.

- a) Quel est l'ensemble des points M lorsque α décrit $]-\pi, \pi[$?
- b) Montrer que pour α de $]-\pi, \pi[$ on a : $z' = \frac{e^{-i\alpha} - 1}{e^{-i\alpha} + 1}$
- c) A quel ensemble appartient le point M' lorsque α décrit l'intervalle $]-\pi, \pi[$?

Exercice n°15 :

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout l'exercice, $P \setminus O$ désigne le plan P privé du point origine O .

- 1) On considère l'application f de $P \setminus O$ dans $P \setminus O$ qui, au point M du plan d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{z}$. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives 1 et i .
- a) Démontrer que pour $z' \neq 0$, on a $\arg(z') \equiv \arg(z) (2\pi)$. En déduire que, pour tout point M de $P \setminus O$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O .
- b) Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus O$ tels que $f(M) = M$.
- c) M est un point du plan P distinct de O , A et B , on admet que M' est aussi distinct de O , A et B .

Établir l'égalité : $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i} \left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} \right) = -i \overline{\left(\frac{z-1}{z-i} \right)}$. En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$

- 2) a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z . Démontrer que M est sur la droite (AB) privée de A et de B si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.
- b) Déterminer l'image par f de la droite (AB) privée de A et de B .

Exercice n°16 :

- 1) Soit θ un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe définie par : $z = \frac{\sin(\theta) + i(1 - \cos(\theta))}{2}$. Déterminer en fonction de θ , le module et un argument de z .
- 2) Dans cette question, θ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1).
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points M et N d'affixes respectives $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$. Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$. Représenter ces ensembles.