

EXERCICES : FONCTION LOGARITHME

Définition et propriétés algébriques

Exercice 1 :

Résoudre :

- a. $e^x=1$; b. $e^x=4$; c. $e^{2x}=2$;
 d. $4e^{-x}-3=12$; e. $e^{2x-1}=2$; f. $e^{-x}=-5$.

Exercice 2 :

Résoudre :

- a. $\ln x=3$; b. $\ln(2x)=0$;
 c. $2\ln x-1=6$; d. $\ln(2x-1)=3$;
 e. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)=1$; f. $\ln(x^2)=4$.

Exercice 3 :

Écrire plus simplement les nombres suivants :

$$a=e^{\ln 3}+e^{-\ln 5} ; \quad b=\frac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}} ; \quad c=\frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$$

Exercice 4 :

Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$e^{\ln(x-1)+\ln x}=x^2-x .$$

Exercice 5 :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$a=\ln 3+\ln \frac{1}{3} ; \quad b=\ln \frac{1}{16} ; \quad c=\frac{1}{2}\ln \sqrt{2} .$$

Exercice 6 :

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

$$a=\ln 50 ; \quad b=\ln \frac{16}{25} ; \quad c=\ln 250 .$$

Exercice 7 :

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble des réels x pour lesquels l'égalité est vraie.

- a. $\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$;
 b. $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$.

Équations - Inéquations

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'inéquation d'inconnue n proposée (n entier naturel).

- a. $2^n \leq 100$. b. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$.
 c. $0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. d. $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$.

Exercice 9 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

- a. $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$.
 b. $2\ln x=\ln(2x^2+8x)$.

Exercice 10 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

- a. $\ln(x+1)=\ln 3$; b. $\ln(x+3)=\ln(2-x)$;
 c. $\ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$; d. $\ln(x^2-2x+2)=0$.

Exercice 11 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

- a. $\ln(1-x)+\ln(1+x)=2(\ln 2-\ln 5)$;
 b. $\ln x+\ln(x-3)=\ln 4$;
 c. $\ln(x(x-3))=\ln 4$.

Exercice 12 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'inéquation, la résoudre :

- a. $\ln x \leq \ln 3$; b. $\ln 2x \leq \frac{1}{2}\ln 4$;
 c. $\ln x \geq 2\ln 5$; d. $\ln x \leq 2\ln 4 - 3\ln 2$.
 e. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$.

Exercice 13 :

Résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a. $\ln(x+1)+\ln(x-2)<2\ln(3-x)$;
 b. $\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$.

Exercice 14 :

- Résoudre l'équation : $2X^2-X-1=0$.
- En déduire les solutions de l'équation : $2(\ln x)^2-\ln x-1=0$.

Exercice 15 :

En vous inspirant de l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

- a. $-(\ln x)^2-4\ln x+5=0$;
 b. $2(\ln x)^2-3\ln\left(\frac{1}{x}\right)-9=0$.

Exercice 16 :

- Résoudre l'inéquation : $X^2+2X-3 \geq 0$.
- En déduire les solutions de l'inéquation : $(\ln x)^2+2\ln x-3 \geq 0$.

Dérivées - Primitives

Exercice 17 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

- $f(x)=x\ln x$.
- $f(x)=(\ln x)^2$.
- $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.
- $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$.

Exercice 18 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

- $f(x)=x^2\ln(1+x)$.
- $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$.
- $f(x)=\ln(3-x^2)-x+2$.
- $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

Exercice 19 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.
2. $f(x) = \ln(\ln x)$.
3. $f(x) = (1 - e^{-x}) \ln x$.
4. $f(x) = e^{x \ln(1-x^2)}$.

Exercice 20 :

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions.

- a. $f(x) = -\frac{3}{x}$ $I =]0; +\infty[$;
- b. $f(x) = \frac{1}{x}$ $I =]-\infty; 0[$;
- c. $f(x) = \frac{2}{x-1}$ $I =]1; +\infty[$.

Exercice 21 :

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- a. Justifier que f admet des primitives sur I ;
- b. Déterminer toutes les primitives de f sur I ;
- c. Déterminer la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $I =]-1; 1[$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.
2. $f(x) = \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}}$; $I = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.
3. $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$; $I =]0; +\infty[$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
4. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $I =]0; 1[$; $x_0 = \frac{1}{e}$ et $y_0 = 1$.

Exercice 22 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{x-1}$$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout x distinct de 1, on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]1; +\infty[$.

Limites**Exercice 24: Vrai - Faux**

Justifier la réponse.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^5 \ln x = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{\ln x} = +\infty$.

Exercice 25:

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par :

- a. $f(x) = x - \ln x$;
- b. $f(x) = x - \ln(x^2)$;
- c. $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2+1}$;
- d. $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^2+1}$.

Exercice 26 :

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par :

- a. $f(x) = x \ln(3x)$;
- b. $f(x) = (x^2+1) \ln(x+1)$;
- c. $f(x) = \ln(e^{3x} - 1)$;
- d. $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$.

Études de fonctions**Exercice 27 :**

Soit a et b , deux réels, et g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$.

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point $A(1; 0)$ et admette, en ce point, une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 28 :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
- b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à C_f en $+\infty$. Étudier la position de C_f par rapport à Δ .
3. Étudier les variations de f . Dresser son tableau de variations.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5. Tracer la droite Δ et la courbe C_f .

Exercice 29 :

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 2 - \ln(1 + e^{2x})$$

C est sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de $\ln(1 + e^{2x})$ en $-\infty$.
- b. En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
- c. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = 2 - x - \ln(1 + e^{-2x})$.
- d. Déterminer la limite de f en $+\infty$, ainsi que l'existence d'une seconde asymptote oblique Δ' .
2. Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C .
3. Résoudre l'inéquation $1 - e^{2x} \geq 0$.
4. Étudier les variations de la fonction f .
5. Représenter Δ , Δ' et C , après avoir indiqué la position de Δ et C .

Exercice 30 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

- Étudier la limite de g en chacune des bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

2. Étude et représentation graphique de la fonction f .

- Étudier la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement les résultats.
- Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$.
- Vérifier que f' a le même signe que g sur $]0; +\infty[$.
- Construire le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

- Déterminer l'équation réduite de la tangente T de C_f au point d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.
- Tracer les éventuelles asymptotes à C_f , T puis C_f .

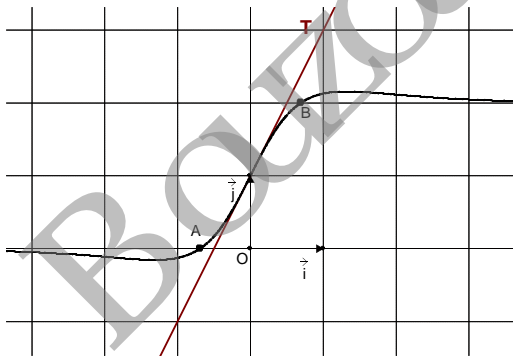
Exercice 31 :

A. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

On donne ci-dessous la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Le point I de coordonnées $(0; 1)$ est un centre de symétrie de C_f et la droite T est tangente à C_f en ce point.



- Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats.
 - Calculer l'abscisse du point d'intersection, noté A, de C_f et de l'axe des abscisses.
En déduire l'abscisse du point B de C_f d'ordonnée 2.
- On répondra aux questions suivantes grâce à une lecture graphique et sans aucun calcul.
 - Donner le signe de f sur \mathbb{R} .
 - Donner la valeur de $f'(0)$.
 - Déterminer la primitive G sur \mathbb{R} de f qui prend la valeur -1 en 0.

B. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - 1$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier la limite de F en $-\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.
 - Démontrer que :
Pour tout réel x , $F(x) = 2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.
 - Étudier la limite de F en $+\infty$.
 - Démontrer que la courbe Γ admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ en $+\infty$.
- Déduire de la partie A le sens de variation de F et dresser son tableau de variation.
- Tracer la courbe Γ et ses asymptotes ainsi que la droite tangente à Γ au point d'abscisse 0.

Problème d'équation différentielle

Exercice 32 :

Partie A - Soit (E) l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' + xy = 0$$

1. a. Démontrer que si une fonction f est solution de (E) sur $I =]1; +\infty[$ qui ne s'annule pas sur I , alors f vérifie la

condition (1) : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2-1}$.

b. Déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur I qui satisfont à la condition (1).

2. Soit g une solution de l'équation (E) sur I et h la fonction

définie sur cet intervalle par : $h(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

- Démontrer que h est une fonction constante sur I .
- En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I .

Partie B - Soit (E') l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x \ln x - x$$

1. Vérifier que la fonction $u : x \mapsto \ln x$ est une solution de l'équation (E') sur $I =]1; +\infty[$.

- Démontrer que f est une solution de (E) sur I si et seulement si la fonction $f+u$ est une solution de (E') sur I .
- En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I .

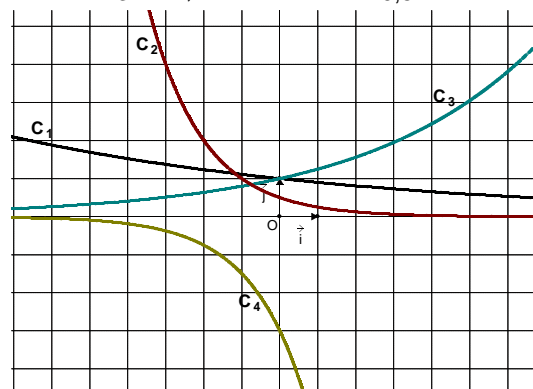
Autres fonctions

Exercice 33 :

On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 0,9^x ; \quad g : x \mapsto \left(\frac{5}{4}\right)^x ;$$

$$h : x \mapsto -3 \times 2^x ; \quad k : x \mapsto 0,5^{x+1}.$$



Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

Exercice 34 :

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations :

a. $10^x = 5$; b. $0,25^{2x} = e$ c. $(-4)^{2x} = 16$.

Exercice 35 :

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations :

a. $5^{x+3} = 25$; b. $2^{3-x} = 5 \times 2^{5-2x}$;
c. $3^{2x+1} = 2^{x+2}$.

Exercice 36 :

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $2^{x+1} > 3$. b. $2^{x+3} \leq 4^{2-x}$.

Exercice 37 :

- Résoudre l'équation $u^2 - 3u + 2 = 0$.
- En déduire les solutions éventuelles de l'équation :
 $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$.

Exercice 38 :

On se propose de comparer les croissances des fonctions , $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2^x$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- Expliquer pourquoi l'étude de la fonction $h : x \mapsto x \ln 2 - 2 \ln x$ permettra de répondre au problème.
- Faire l'étude complète de la fonction h sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
- En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Conclure sur le problème posé.

Exercice 39 :

On se propose de déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $2^x = 2(x+1)$, pour tout réel x .

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près du réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$).
- Dresser le tableau de variation de f (on ne calculera pas $f(x_0)$ mais on montrera que $f(x_0) < 0$).
- En déduire que l'équation $2^x = 2(x+1)$ admet deux solutions α et β , avec $\alpha < x_0 < \beta$.

Montrer que β est un entier naturel et donner un encadrement de longueur 10^{-2} du réel α .

5. Application

- Justifier que, pour tout $x \geq 3$, $2^x \geq 2(x+1)$.
- On admet que lorsqu'on lance n fois, $n \geq 2$, une pièce de monnaie bien équilibrée, la probabilité d'obtenir au plus une fois Pile est $p_n = \frac{n+1}{2^n}$.

Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que p_n soit égale à $\frac{1}{2}$? supérieure à $\frac{1}{2}$? inférieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 40 :

Simplifier les écritures suivantes :

$\sqrt[10]{512}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{243}$; $27^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[4]{256}$.

Exercice 41 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a. $x^{\frac{3}{2}} = x$. b. $x^{\frac{2}{3}} = 25$.
c. $3x^{\frac{1}{4}} = 2x^{\frac{1}{2}}$. d. $3x\sqrt{x} = 81$.

Exercice 42 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

- Étudier et interpréter la dérivabilité de f en 0.
- Étudier les variations de f .

Exercice 43 :

Exprimer en fonction de $\log 2$ les nombres suivants : $\log 20$; $\log 2000$; $\log 0,008$.

Exercice 44 :

On sait, en Chimie, que le pH d'une solution permet d'exprimer son caractère acide ou basique. Ce nombre est un décimal compris entre 1 et 14 de sorte que :

- Si $\text{pH} < 7$, alors la solution est dite acide.
- Si $\text{pH} > 7$, alors la solution est dite basique.
- Si $\text{pH} = 7$, elle est dite neutre.

On sait alors que le pH est associé à la relation $\text{pH} = -\log [H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+ , exprimée en mol/L.

- Une solution possède une concentration en ions H_3O^+ égale à 5×10^{-9} . Quel est son pH ? Que peut-on dire d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est égale à 0,1 ?
- Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution neutre ?
- Si l'on augmente la concentration en ions H_3O^+ dans une solution, diminue-t-on ou augmente-t-on le pH de cette solution ?
- Que faut-il faire à une solution pour incrémenter ou décrémenter son pH ?

Vocabulaire : Incrémenter, c'est ajouter 1. Donc décrémenter, c'est... ?