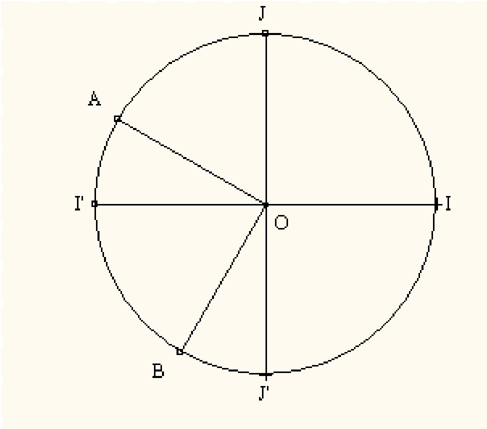
Exercice n°1 :



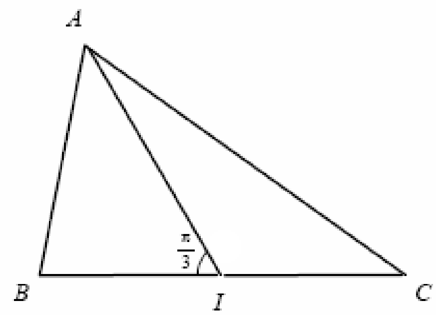
Sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, on considère deux points A et B tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BO}\right)$, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)$, $\left(2\overrightarrow{OA},-3\overrightarrow{OB}\right)$.

Exercice n°2 :

ABC est un triangle et I le milieu de [BC]. On sait que : $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

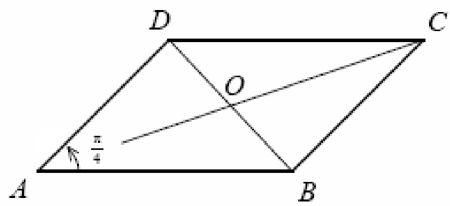


Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice n°3 : ©

Le plan étant orienté dan le sens direct.
ABCD est un parallélogramme de centre O.



1. Démontrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv 0[2\pi]$.
2. Quelle propriété du parallélogramme a – t – on démontré ?
3. On suppose que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

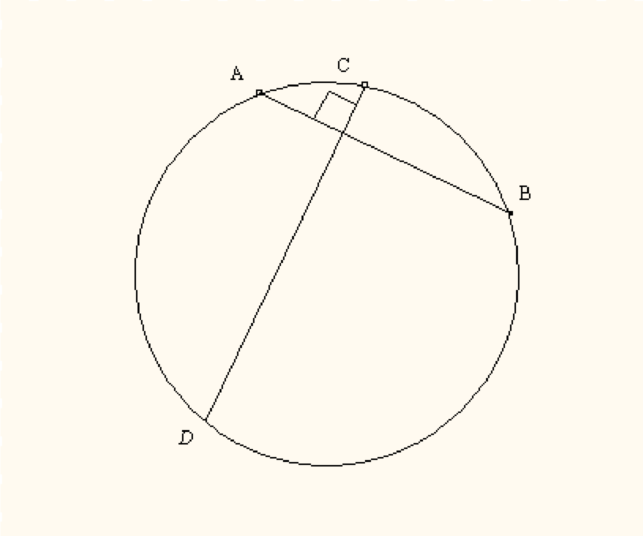
   Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
   $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}\right)$, $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$.

Exercice n°4 : ©

Etant donnés deux points A et B du plan orienté dans le sens direct tels que AB = 3 cm.

1. Déterminer et construire l'ensemble $C_1=\left\{M\in P/\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$.
2. On désigne par $C_2=\left\{M\in P/\frac{MA}{MB}=2\right\}$.
   a) On note G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -4).
   Montrer que C_2 est l'ensemble des points M du plan tels que : $MG^2=\frac{1}{3}\left(GA^2-4GB^2\right)$.
   b) En déduire que C_2 est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Utiliser les résultats précédents pour construire le triangle ABC vérifiant : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $CA=2CB$.

Exercice n°5 : ©



[AB] et [CD] sont deux cordes perpendiculaires d'un cercle ζ et I leur point d'intersection. On pose E le milieu de [AD].

1. Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$.
2. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$.
3. Montrer que les droites (EI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice n°6 :

Dans le plan orienté dans le sens direct, on désigne par ζ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O. $(AC = 6 \text{ cm})$.

1- Construire le point B de ζ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{169\pi}{3}[2\pi]$.

2- Soit I est le symétrique de O par rapport à (BC).

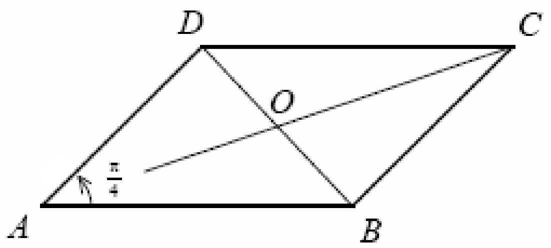
3- a) Prouver que $OBIC$ est un losange.

b) Chercher $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}\right)$.

c) Montrer que $I \in \zeta$.

4- Quel est l'ensemble $F = \left\{M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]\right\}$?

Exercice n°3 :



1. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]\equiv 0[2\pi]$

2. D'après la question 1. On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$

   Dans un parallélogramme, deux angles opposés sont isométriques.

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

   - $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{\pi}{4}\in\,]-\pi,\pi]\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)$

   - $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DA}\right)$

   - $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}}\right)[2\pi]\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

     $-\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi,\pi\right]\Rightarrow-\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$

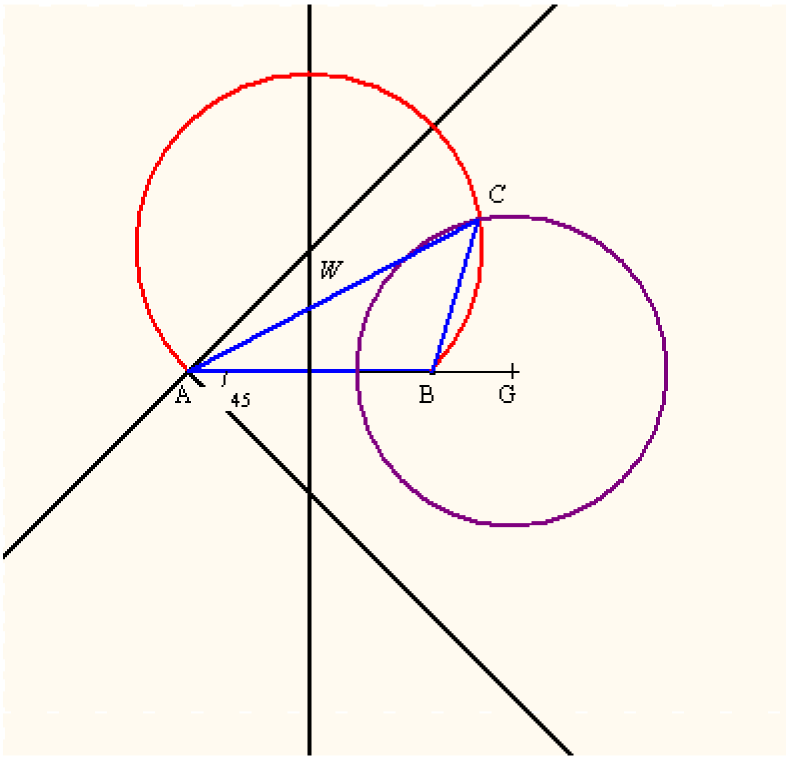
   - $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA}}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]\Rightarrow\pi$ la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$

Exercice n°4 :

1. $C_1 = \left\{ M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \right\}$

   C_1 est l'arc d'un cercle ζ passant par A et B et tangent à la demi-droite [At) telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

   Cet arc est situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas [At) et il est privé des points A et B.



2. $C_2 = \left\{ M \in P / \frac{MA}{MB} = 2 \right\}$

   a) G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -4).

   $M \in C_2 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 - 4\,MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 = 0$

   $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = 0$

   $\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 - 4MG^2 - 8\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - 4GB^2 = 0$

   $\Leftrightarrow -3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}} \right) + GA^2 - 4GB^2 = 0$

   $\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}\left(GA^2 - 4GB^2\right).$

   b) $\overrightarrow{AG} = \frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow GA = \frac{4}{3} \times AB = 4$

   $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow GB = \frac{1}{3} \times AB = 1$

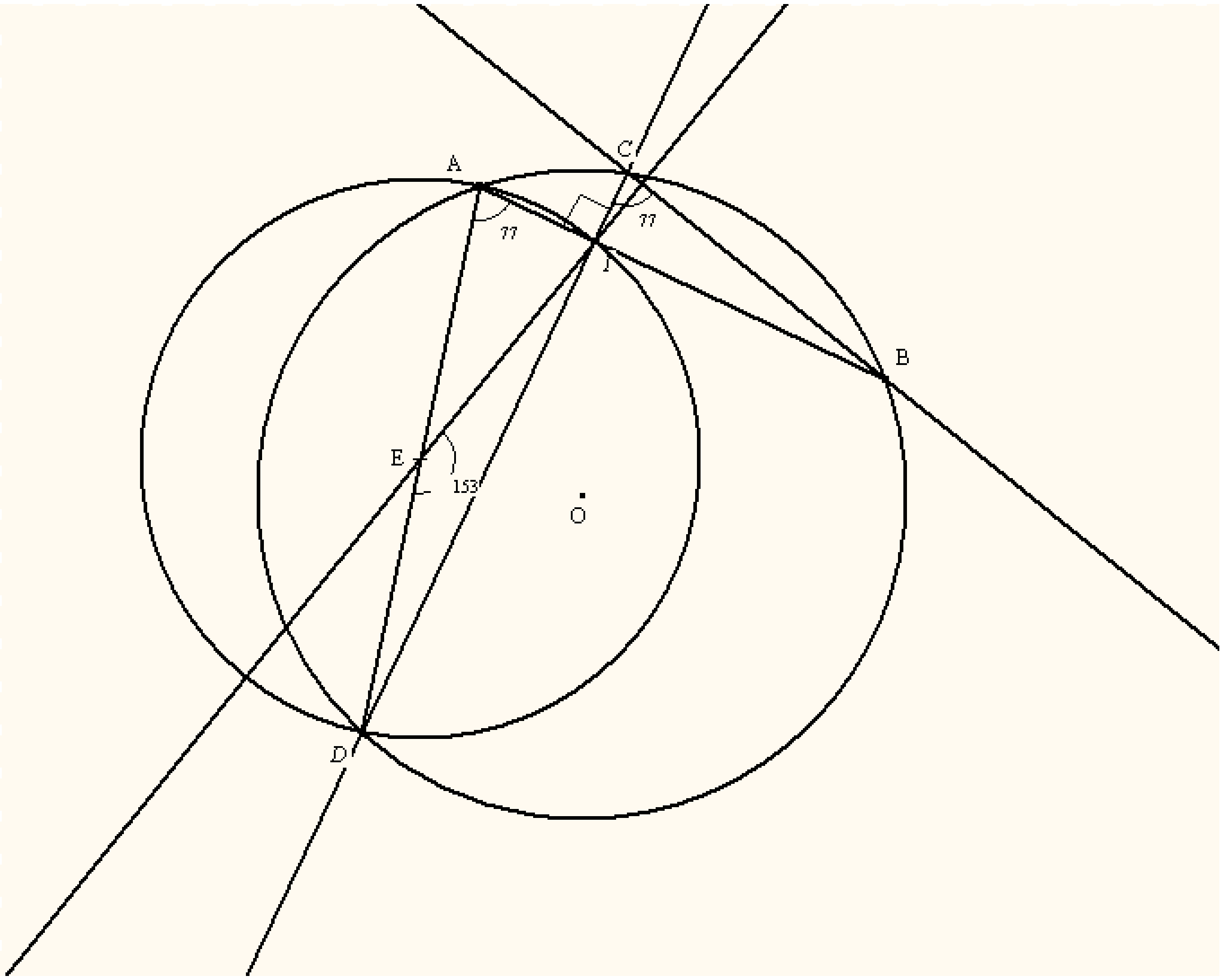
   $M \in C_2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}\left(GA^2 - 4GB^2\right) = \frac{1}{3}(16-4) = 4 \Leftrightarrow MG = 2 \Leftrightarrow M \in \zeta_{(G,2)}$

3. $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $CA = 2CB \Leftrightarrow C \in C_1 \cap C_2$.

Exercice n°5 :

1. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$

   Car A et C appartiennent au même arc orienté BD



2. On considère le cercle circonscrit au triangle AID rectangle en I.

   C'est un cercle de centre E le milieu de [AD]

   $\left(\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{ED}}\right)\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

   (angle inscrit et angle au centre associé).

3.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{ED}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi] \ \left(\text{car } \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{ED}\right)$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}}\right)+\pi\,[2\pi] \equiv \underbrace{\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)}_{\frac{\pi}{2}}+\pi\,[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ (EI) et (BC) sont perpendiculaires.