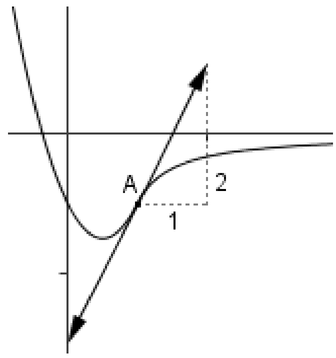
# *Dérivabilité*

## I/ Rappels :

**Activité 1:**

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 2x - 1 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \frac{1}{1-2x} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$




1) Etudier la continuité de f en 1
2) Etudier la dérivabilité de f en 1.
3) En déduire une interprétation géométrique.
4) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point A(1,-1). Puis la tracer à l'aide du point A et un vecteur directeur.

**Retenons :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR et $x_0$ un réel de I. (C) est sa courbe selon un repère.

1) f est dite dérivable en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. On note le réel obtenu $f'(x_0)$ appelé le nombre dérivé de f en $x_0$.

∗ géométriquement : (C) admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

∗ La tangente (T) a pour équation cartésienne : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ; $x \in I$

2) f est dite dérivable a à droite en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. On note le réel obtenu $f'_d(x_0)$ appelé le nombre dérivé à droite de f en $x_0$.

∗ géométriquement : (C) admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente $(T_d)$ de coefficient directeur $f'_d(x_0)$

∗ La demi-tangente $(T_d)$ a pour équation cartésienne : $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ; $x \in I$ et $x \geq x_0$.

∗ Un vecteur directeur de $(T_d)$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(x_0) \end{pmatrix}$

3) f est dite dérivable a à gauche en $x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. On note le réel obtenu $f'_g(x_0)$ appelé le nombre dérivé à gauche de f en $x_0$.

∗ géométriquement : (C) admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente $(T_g)$ de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.

∗ La demi-tangente $(T_g)$ a pour équation cartésienne : $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ; $x \in I$ et $x \leq x_0$.

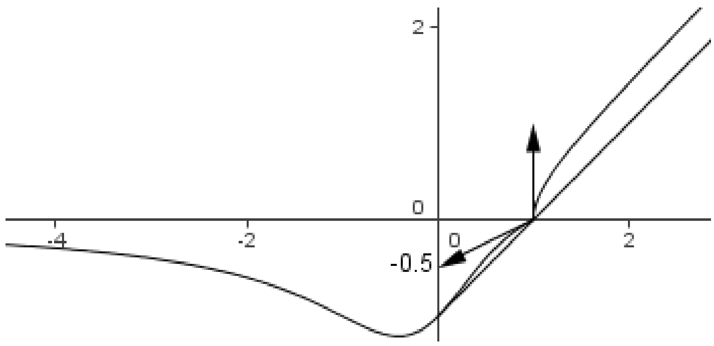
∗ Un vecteur directeur de $(T_g)$ est $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(x_0) \end{pmatrix}$

4) f est dérivable en $x_0$ si et seulement si $\begin{cases} \text{f est dérivable à droite en } x_0 \\ \text{f est dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

**Activité 2 :**

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$. (C) est sa courbe selon un repère ortho.

1) Etudier la continuité de f en 1.
2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.
   b) En déduire une interprétation géométrique.
   c) Tracer les deux demi-tangentes à (C) au point A(1,0). Que peut on en déduire pour le point A ?
3) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
4) Définir la fonction dérivée f'.




**<u>Retenons :</u>**

1) Soit f une fonction définie sur un domaine D et vérifiant pour $x_0 \in D$ :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0$ et sa courbe possède une demi-tangente verticale au point $A(x_0,f(x_0))$

2) Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel $x_0$ de I. Dans ce cas f possède une fonction dérivée notée f' définie sur I, qui à tout réel x de I associe f'(x)

3) Une fonction f définie sur un intervalle de type [a,b] ; (a<b) est( dite dérivable sur [a,b] si

$$\begin{cases} \text{f est dérivable sur } ]a,b[ \\ \text{f est dérivable à droite en a} \\ \text{f est dérivable à gauche en b} \end{cases}$$

4) Une fonction définie sur un intervalle I de type [a,b[ (resp. ]b,a]) où b est fini ou infini est dite dérivable sur I, si $\begin{cases} \text{f est dérivable sur } ]a,b[ \\ \text{f est dérivable à droite en a} \end{cases}$ ( resp. $\begin{cases} \text{f est dérivable sur } ]a,b[ \\ \text{f est dérivable à gauche en a} \end{cases}$)

5) ∗Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.

∗ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

**<u>Activité :</u>** (dérivées des fonctions usuelles)

Recopier et compléter le tableau suivant :

| Fonction f | f '(x) |
|---|---|
| $f : x \longmapsto c$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto ax+b$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto x^n$ ; $n\in IN^* \setminus \{1\}$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ ; $n \in IN^* \setminus \{1\}$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \sin(ax+b)$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \cos(ax+b)$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |
| $f : x \longmapsto \tan x$ | $f'(x)=$ ; $x\in$ |

**Activité :** (Opérations sur les fonctions dérivées)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR.
Recopier et compléter le tableau suivant :

| Fonctions | Fonctions dérivées |
|---|---|
| f+g | |
| a.f (a constante réelle) | |
| f.g | |
| $f^n$ (n≥2) | |
| $\frac{1}{f}$ (si f≠0 sur I) | |
| $\frac{f}{g}$ (si g ≠0 sur I) | |
| $\sqrt{f}$ (si $f > 0$) | |

**Activité :**

Soit la fonction f : $x \longmapsto x\sqrt{2x+6}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé.

1) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

2) Montrer que $f'(x)=\frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$ $\forall$ x∈]-3,+∞[.

3) Etablir le tableau de variation de f. En déduire que f admet un extremum global.

Que peut on dire pour f(-3) ?

**Retenons :** (minimum et maximum d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

* S'il existe $x_0$ appartenant à D tel que pour tout x de D, f(x)≥f($x_0$), on dit que la fonction f admet sur D un minimum en $x_0$. Le réel f($x_0$) s'appelle le minimum de f.
* S'il existe $x_0$ appartenant à D tel que pour tout x de D, f(x)≤f($x_0$), on dit que la fonction f admet sur D un maximum en $x_0$. Le réel f($x_0$) s'appelle le maximum de f.
* Un minimum ou un maximum s'appelle aussi un extremum de f.

**Remarque :**

Dans le résultat précédent si D=$D_f$ (domaine de définition), alors f($x_0$) s'appelle un extremum global (ou absolu).

**Activité :**

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{f(x)}{x-3}$

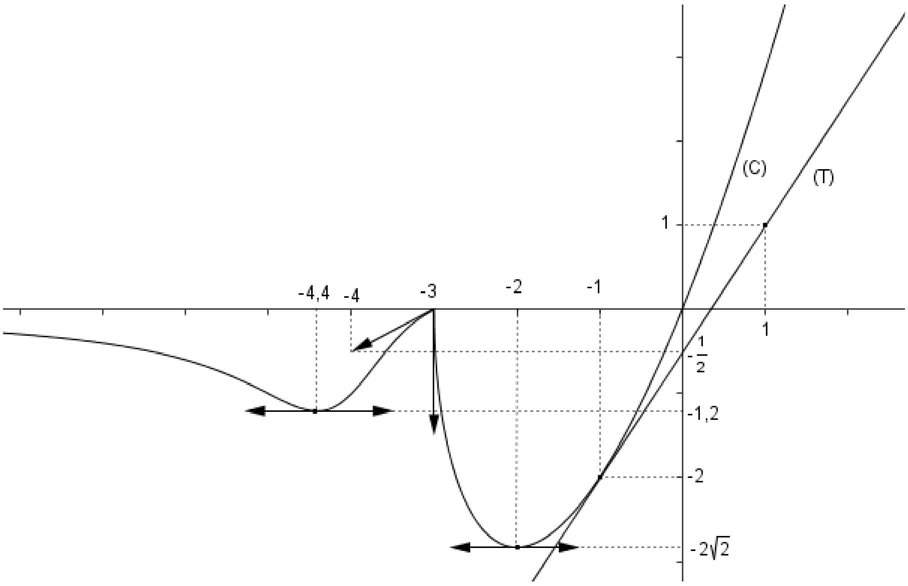
2) Déterminer : f '(-1) et $f'_g$(-3).

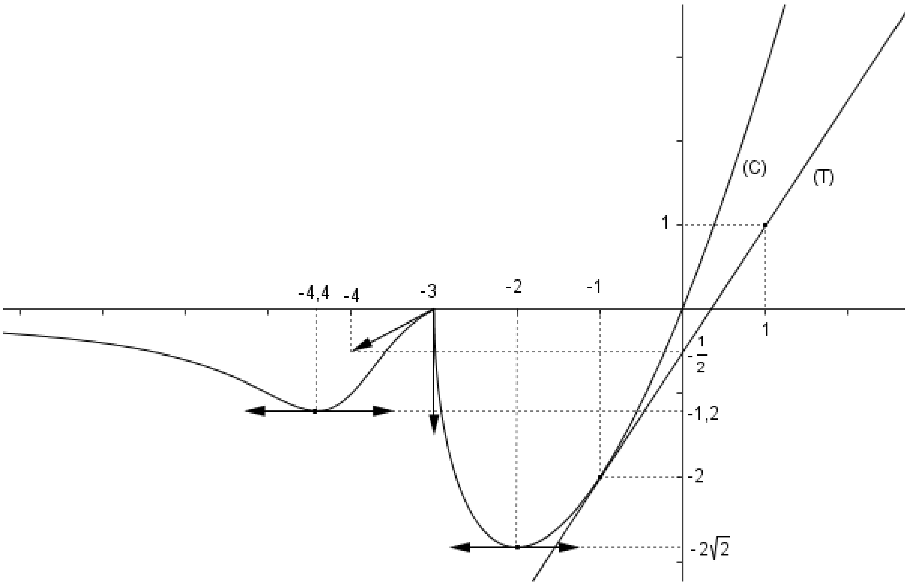
3) Résoudre dans IR l'équation f '(x)=0

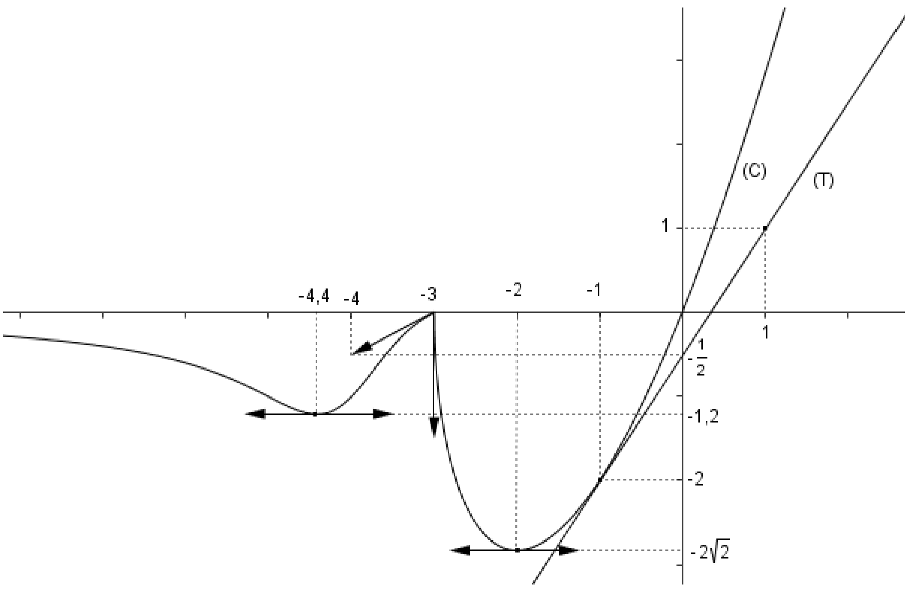
4) Dresser le tableau de variation de f. En déduire ses extrema en donnant leurs natures.

**Exercices à la maison :**

16+10 page 56/57


(C)
(T)
1
-4,4
-4
-3
-2
-1
1
$-\frac{1}{2}$
-1,2
-2
$-2\sqrt{2}$

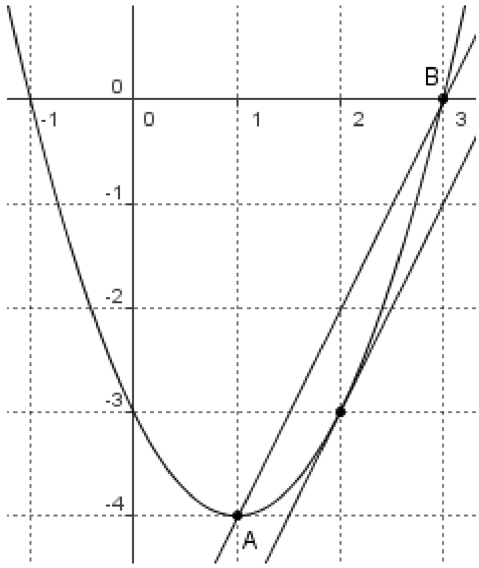

(C)
(T)
1
-4,4
-4
-3
-2
-1
1
$-\frac{1}{2}$
-1,2
-2
$-2\sqrt{2}$


(C)
(T)
1
-4,4
-4
-3
-2
-1
1
$-\frac{1}{2}$
-1,2
-2
$-2\sqrt{2}$

## II/ Dérivée seconde et point d'inflexion :

## III/ Dérivabilité d'une fonction composée :

## IV/ Théorème et inégalités des accroissements finis :




**Activité :**
Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 3$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé. On donne les points A(1,f(1)) et B(3,f(3)).

1) Préciser le coefficient directeur de la droite (AB).

2) a) Montrer que (C) admet une tangente (T) parallèle à (AB) en un point $M_0(x_0, f(x_0))$ que l'on précisera.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente (T).

3) Tracer (AB) et (T)

**Théorème des accroissements finis :**
Soit deux réels a et b tels que a<b. Si f est une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b[, alors il existe au moins un réel c ∈ ]a,b[ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (ainsi $f(b) - f(a)=f'(c).(b-a)$)

■ Interprétation géométrique :
Il existe au moins une tangente (T) à (C) parallèle à la droite (AB) telle que A(a,f(a)) et B(b,f(b))

**Activité :**
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I=[3,+∞[ telle que $2 \leq f'(x) \leq 5$, ∀ x∈I
Montrer que $8 \leq f(7) - f(3) \leq 20$ et que $2 \leq f(4) - f(3) \leq 5$

∗ **Inégalités des accroissements finis :**
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et s'il existe deux constantes réelles m et M telles que ∀ x∈I, on a : $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous réels a et b de I tels que a<b on a :
$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

**Corollaire :**
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et s'il existe k>0tels que pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq k.|b - a|$

**Exercice :**
1) Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}$
 a) Montrer que ∀ x∈ [64,65], on a : $\frac{1}{18} \leq f'(x) \leq \frac{1}{16}$
 b) En déduire un encadrement de $\sqrt{65}$
2) a) Montrer que pour tous réels a et b, on a : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$
 b) En déduire que pour tout réel x, on a : $|\sin x| \leq |x|$
3) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $x \leq \tan x \leq 2x$
4) Montrer que pour tous réels x et y de $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$, on a : $|\cos^2 x - \cos^2 y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$