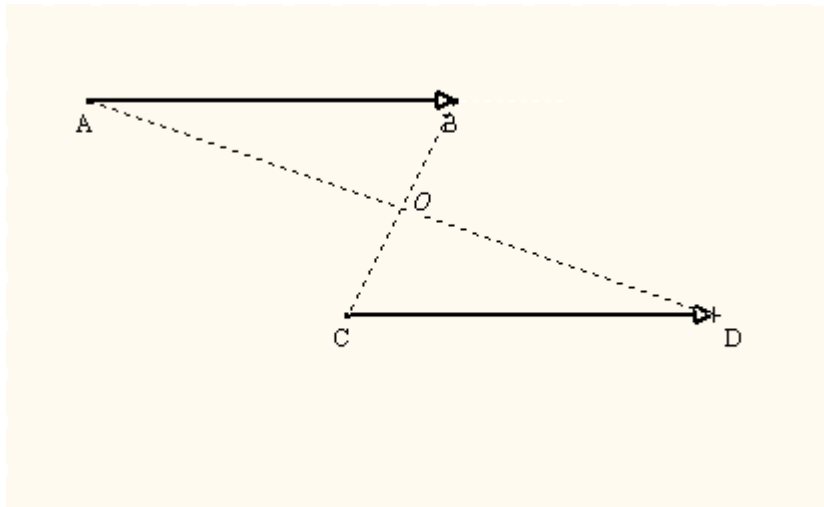
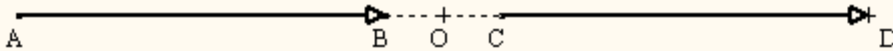


Rappel et compléments :Définition :

Soient (A, B) et (C, D) deux bipoints du plan tels que les segments [AD] et [BC] ont
alors ces bipoints représentent un même objet mathématique appelé vecteur et noté \overrightarrow{AB} ou \overrightarrow{CD} .
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Les bipoints (A, A) et (B, B) représentent un même vecteur appelé et noté

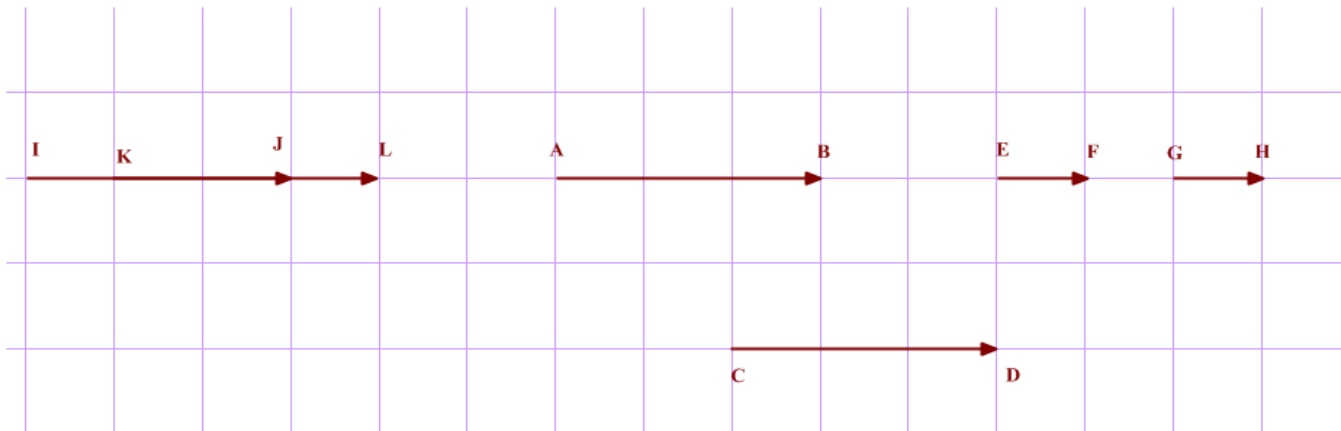
Egalité vectorielle :

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

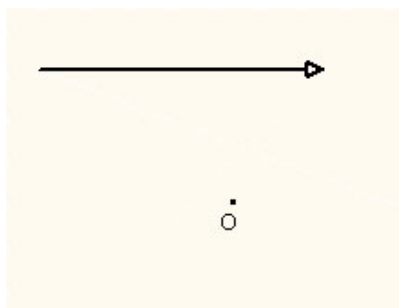
- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$, si et seulement si, $(dir \overrightarrow{AB} = dir \overrightarrow{CD}, sens \ de \ \overrightarrow{AB} = sens \ de \ \overrightarrow{CD} \ et \ AB = CD)$

Citer les vecteurs égaux sur la figure ci-dessous :

.....
.....

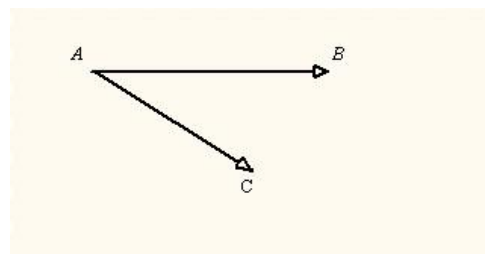


- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$ équivaut à $\overrightarrow{A\dots} = \overrightarrow{\dots D}$ (permutation des lettres médianes).
- Si de plus A, B et C ne sont pas alignés alors $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$ équivaut à ABDC est
- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC})$ équivaut à
- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC})$ équivaut à
- Etant donné un vecteur \vec{u} et un point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



Addition des vecteurs :

- Soit A un point du plan et soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de représentants respectifs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
On appelle vecteur somme de \vec{u} et \vec{v} , le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tels que [BC] et [AD] aient même milieu.
On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
Construire $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ sur la figure ci – contre :



- Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \dots$, c'est la relation de
- Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \dots$; $\vec{u} + \vec{0} = \dots$;
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{v} = \dots$ appelé et on a : $-\overrightarrow{AB} = \dots$

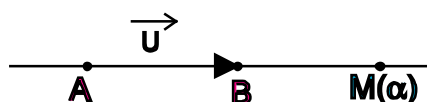
Exercice :

Soient M, N, P et Q quatre points du plan. Etablir chacune des égalités suivantes :

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} ; \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ} ; \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MQ} = \vec{0}.$$

Multiplication d'un vecteur par un réel :

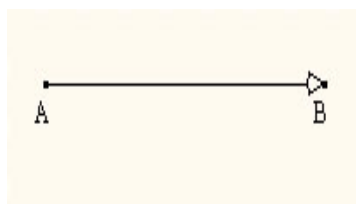
- Soient un vecteur non nul \vec{u} , deux points A et B du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et un réel α . On désigne par M le point de la droite (AB) d'abscisse α dans le repère (A, B).



Le produit du vecteur \vec{u} par le réel α est le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$. On note $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{v}$ ou $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors pour tout réel α , $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Lorsque $\alpha = 0$ on a $M = A$ et $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

- Soit (A, B) un bipoint tel que $A \neq B$. Construire C tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ lorsque $\alpha = 4$; $\alpha = \frac{3}{4}$; $\alpha = -2$ et $\alpha = -\frac{3}{4}$.



- Pour tous réels α et β et vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :
 $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \dots$; $\alpha (\beta \vec{u}) = \dots$; $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \dots$; $1 \cdot \vec{u} = \dots$; $(-1) \cdot \vec{u} = \dots$
- (Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires) équivaut à (il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$)

Exercice :

1. Simplifier les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{w} = 2(\vec{u} + 3\vec{v}) + 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 9\vec{u} ; \vec{w} = \frac{1}{2}(3\vec{u} - 5\vec{v}) + 5\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v}\right) - \frac{1}{3}(3\vec{u} - 6\vec{v}).$$

2. Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

- Marquer les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
- Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?
- Montrer que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EO}$.

Vecteurs et configurations géométriques :

Milieu :

I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\vec{IA} + \vec{IB} = \dots\dots$ ou $\vec{AI} = \dots\dots$ ou $\vec{AB} = \dots\dots$

Exercices 3 et 7 page 90.

Parallélisme :

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si, \vec{AB} et \vec{CD} sont

Exercice 6 page 90.

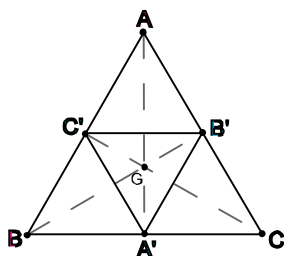
Alignement :

Trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, \vec{AB} et \vec{AC} sont

Exercices 4 et 5 page 90.

Centre de gravité :

Soit ABC un triangle et G un point du plan. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit le centre de gravité du triangle ABC est : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \dots\dots$



Exercice :

On considère un triangle ABC et M un point du plan tel que : $4\vec{MA} - 3\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$.

- a) Montrer que $\vec{AM} = \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.
- b) Soit I le milieu de [BC], montrer que \vec{AM} et \vec{AI} sont colinéaires.
- c) On désigne par G le point du plan tel que $\vec{GI} = \vec{MG}$ et par B' l'image de B par la symétrie de centre M. Montrer que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GB'} = \vec{0}$. Que peut-on conclure ?

Exercice 14 page 91.

Activité 43 page 81

Enoncé de THALES :

Soit ABC un triangle, M est un point de (AB) distinct de A. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

$$\text{Si } \vec{AM} = x\vec{AB} \text{ alors } \vec{AN} = x\vec{AC} \text{ et } \vec{MN} = x\vec{BC} .$$

Activité 44 page 81

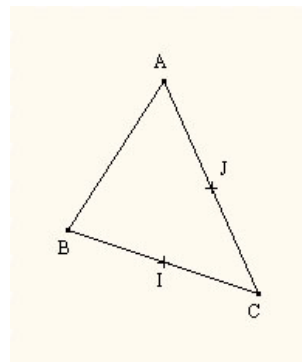
Bases de l'ensemble des vecteurs du plan :

Définition :

On appelle base de l'ensemble des vecteurs tout couple de vecteurs non colinéaires.

Exemples

Citer de la figure ci contre des couples des vecteurs formant une base.



Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ})$ forme-t-il une base de l'ensemble des vecteurs ? Pourquoi ?

Composantes d'un vecteur dans une base :

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan,

\vec{u} un vecteur et A un point.

Construire les points B, C et M tels que :

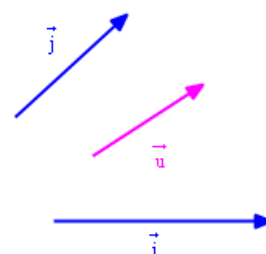
$$\overrightarrow{AB} = \vec{i}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \vec{u}$$

Soit M_1 le projeté du point M sur (AB)

parallèlement à (AC) et M_2 le projeté de M sur (AC)

parallèlement à (AB).

Ecrire \overrightarrow{AM} à l'aide de $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$



En déduire qu'il existe deux réels x et y tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Définition

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan.

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un couple unique de réels (x, y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ce couple est appelé couple de composantes de \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$.

Propriétés

- $\vec{0} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$; $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$; $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$

- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ alors $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \dots$; $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\alpha \vec{u} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 et 5 page 82.

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

(\vec{i}, \vec{j}) une base ; $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$. Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Montrer que $xy' - x'y = 0$

.....

.....

.....

Propriété

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ sont colinéaires, si et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

Le réel $xy' - x'y$ est appelé déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . on note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Exercice 6 page 82.

Repères du plan :

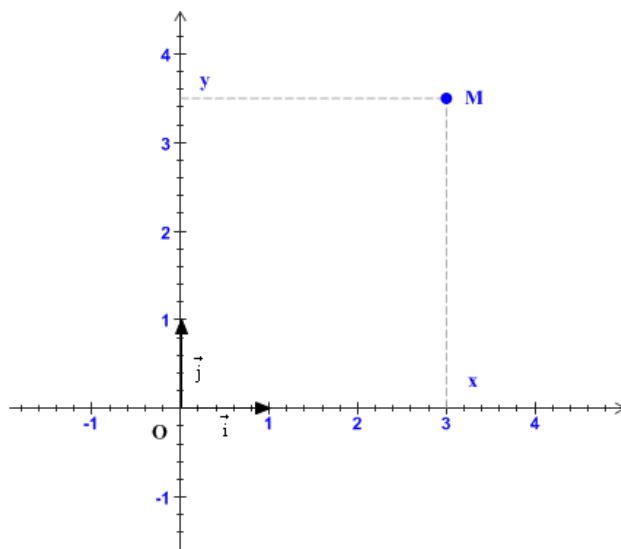
Définition :

Soit O un point du plan et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs.

Le triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé repère cartésien du plan.

A tout point M du plan, on associe un couple unique de réels (x, y) tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

(x, y) est le couple des coordonnées du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note $M(x, y)_{(O, \vec{i}, \vec{j})}$.



Composantes d'un vecteur défini par un bipoint :

Soient deux points $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ dans le plan muni d'un repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Le vecteur \vec{MN} a pour composantes $(x_N - x_M)$ et $(y_N - y_M)$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On note $\vec{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}_B$.

Activités 26 et 27 page 76.

Norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u} = \vec{AB}$ un vecteur du plan, on appelle norme de \vec{u} la distance AB. On note $\|\vec{u}\| = AB$.

Si $\|\vec{u}\| = 1$ alors \vec{u} est dit unitaire ou normé.

Propriétés

$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$; $\|\alpha\vec{u}\| = \dots\dots\dots$; $\|\vec{u} + \vec{v}\| \dots\dots \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Repère orthonormé :

Un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est dit orthonormé lorsque $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Activité 31 page 77.

Distance de deux points dans un repère orthonormé :

Activité 32 page 78.

Propriétés

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

* Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ alors $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$

* Si $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ alors $MN = \dots\dots\dots$

Activité 33 page 78.

Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs :

Activité 34 page 78.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$ deux vecteurs dans une base orthonormée. On a :

$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \right)$ équivaut à $(a a' + b b' = 0)$.

Exercice

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points : A (-2, 1) ; B (3, 6) ; C (4, -1).

1. Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Quel est le centre I de ce parallélogramme ?
2. Montrer que $(AC) \perp (BD)$. Quelle est la nature du parallélogramme ABCD ?