EXOS COMPLEXES

Ensemble des points M(x ; y) tels que f(z) soit un réel ou un imaginaire pur

1. 1°)Résoudre dans C les équations suivantes :

a) $\dfrac{z-2i}{z-1-i}=3$; b) $\dfrac{z-2i}{z-1-i}=4i$

2°)Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité: 4cm).

A tout point m d' affixe z ($z\neq 1+i$), on associe le point M d' affixe $Z=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$.

On pose z=x+yi et Z=X+Yi.

a)Exprimer X et Y en fonction de x et y.

b)Déterminer et construire l' ensemble (E) des points m(x,y) du plan tels que Z soit un réel.

c)Déterminer et construire l' ensemble (F) des points m(x,y) du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

2. $\mathbb{C}$ désigne l' ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}'$ le sous-ensemble des nombres dont la partie réelle est nulle.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et f est l' application de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$.

1°)Soit $z\in\mathbb{C}'$ et Z=f(z) avec $z=x+y\,i$ et $Z=X+Y\,i$; x, y, X, Y étant des réels.

Calculer X et Y en fonction de x et y.

2°)Calculer f(1) et f(1+i).

3°)Déterminer l' ensemble (E) des points M d' affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

4°)Déterminer l' ensemble (F) des points M d' affixe z tels que la partie imaginaire Y de Z=f(z) soit une constante réelle donnée k.

5°)Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}'$, on a : $f(z)=f\left(-\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

3. (forme algébrique)

Soit f l' application qui à tout nombre complexe différent de 1 associe : $f(z)=z'=1+\dfrac{4}{\bar{z}-1}$.

Soit M et M' les images respectives de z et z' dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)On pose z= x + iy et z' = x' + iy' (où x, y, x' , y' sont quatre réels). Calculer x' et y' en fonction de x et y.

2°)Déterminer l' ensemble des points M tels que la partie réelle de z' soit égale à - 1.

3°)Soit le point A d' affixe 1.

a)Démontrer que $\overrightarrow{AM'}=\dfrac{4}{AM^2}\overrightarrow{AM}$.

b)En déduire l' ensemble des points M tels que M' soit confondu avec M.

4. (forme algébrique)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout nombre complexe z distinct de $-i$, le nombre complexe $T=\dfrac{z+1}{-i(z+i)}$.

1. Calculer le complexe T_0 obtenu pour $z=i$; déterminer le module et un argument de T_0.

2. Dans cette question, on pourra poser $T=U+iV$ et $z=x+iy$ où U, V, x, y sont réels.

2.a. Déterminer et représenter l'ensemble C des point M d'affixe z tel que T soit réel.

2.b. Déterminer et représenter l'ensemble D des points M d'affixe z tel que T soit imaginaire pur.
Soit A le point d'affixe −1 et B le point d'affixe −i. Donner une interprétation géométrique de $|T|$.
Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $|T| = 1$.

5. (forme trigonométrique)
On considère le nombre complexe :

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

1°)Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument .
2°)a)En déduire le module de a et justifier qu' une mesure de l' argument de a est $-\frac{5\pi}{12}$.
b)Représenter dans un repère orthonormal direct les points A , B et C d' affixes respectives :a , − a et a^2 .
3°)Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ ainsi que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4°)Déterminer puis représenter sur le graphique précédent l' ensemble (E) des points M d' affixe z tels que $a^2 z$ soit réel.
5°) Déterminer puis représenter sur le graphique précédent l' ensemble (F) des points M d' affixe z tels que $\frac{z-a}{z+a}$ soit imaginaire pur non nul .

6. (forme trigonométrique)
Soit l' application f définie par $f(z)=\frac{z-2i}{z+1}$ pour les nombres complexes z différents de −1.
On désigne par A, B, M et M' les points du plan complexe d' affixes respectives −1, 2i, z, f(z).
1°)Calculer le module et un argument de f(i).
2°)Déterminer et représenter l' ensemble (E_1) des points du plan d' affixes z tels que $|f(z)|=1$.
3°)Interpréter géométriquement Arg(f(z)) puis déterminer et représenter:
a)l' ensemble (E_2) des points M du plan d' affixes z tels que f(z) soit un réel strictement négatif.
b)l' ensemble (E_3) des points M du plan d' affixes z tels que f(z) soitun imaginaire pur.
4°)a)Calculer, pour tout z différent de −1, $|f(z)-1|\cdot|z+1|$.
b)On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Montrer que M' appartient à un cercle C que l' on déterminera.

Equations,systèmes

7. Résoudre le système dont les inconnues sont les complexes z et z' : $\begin{cases}(1+i)z+(1-i)z'=2+i\\ 3z-2iz'=4-i\end{cases}$

8. Pour tout complexe z,on pose: $f(z)=z^3+(1+i)z^2+(i-1)z-i$.
1°)Montrer que l' équation $f(z)=0$ admet une solution imaginaire pure a que l' on calculera.

2°)Montrer qu' il existe deux réels p et q tels que $f(z)=(z-a)(z^2+pz+q)$.

Résoudre, dans C, l'équation $f(z)=0$

9. Soit $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$.

1°)Montrer que si $z\in\mathbb{C}$ est solution de l'équation (E): $P(z)=0$ alors $\bar{z}$ est également solution.

2°)Vérifier que $1+i$ est solution de (E).

En déduire que P(z) se factorise sous la forme du produit de deux polynômes à coefficients réels.

Résoudre l'équation (E).

10. I-On considère la fonction f de la variable complexe z définie par:

$f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})-8i$.

1°)Vérifier que: $f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$.

2°)Résoudre dans C l'équation $f(z)=0$.

3°)Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

II-1°)Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les trois complexes: $z_1=\sqrt{3}-i$; $z_2=\sqrt{3}+i$ et $z_3=2i$.

Représenter dans le plan complexe les trois points M_1, M_2, et M_3 d'affixes z_1, z_2 et z_3 et montrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.

2°)Calculer z_2-z_1 et z_2-z_3.

Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

11. On considère un nombre complexe z de module 1 et d'argument 2θ avec $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

1°)Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

$\bar{z}$; $1+z$; $1-z$; $(1-z)^2$ et $z'=\frac{(1-z)^2}{\bar{z}(1+z)}$.

2°)Calculer la valeur de θ pour laquelle z' est réel. Donner alors la valeur de z'.

Exponentielle complexe

12. z est un complexe non nul. On pose $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1°)Quel est l'ensemble des complexes z tels que $f(z)=0$?

2°)M_0 est le point d'affixe $z_0=1+i$.

a)Calculer $\frac{1}{z_0}$ et placer le point N_0 d'affixe $\frac{1}{z_0}$ dans un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe.

b)Construire géométriquement le point M'_0 d'affixe $f(z_0)$ à partir de M_0 et N_0.

3°)Montrer que si M d'affixe z est un point du cercle de centre O et de rayon 1, alors $f(z)$ est réel

13. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:

$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n=n\frac{\pi}{3}$

On désigne par M_n le point du plan d'affixe z_n définie par:

$z_n=u_ne^{iv_n}=u_n(\cos v_n+i\sin v_n)$.

1°)Déterminer les valeurs de n pour lesquelles z_n est réel.

2°)Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (on prendra 4cm pour unité de longueur).

a)Représenter dans P les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b)Calculer en fonction de u_n les longueurs des trois côtés du triangle OM_nM_{n+1}. Quelle est la nature de ce triangle?

3°)Soit la suite $(a_n)_{n\in N}$ définie par $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Déterminer sa limite.

14. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.unité graphique 1 cm.

Soient (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme u_1 positif et (θ_n) une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$,de premier terme θ_1 .

On désigne , pour tout n entier naturel non nul , par z_n le nombre complexe de module u_n et d' argument θ_n et par M_n le point d' affixe z_n.

1°)a)Calculer <u>sous forme trigonométrique</u> z_1 , z_2 et z_3 sachant que leur produit est égal à 8i .

b)Construire les images M_n ,pour n = 1 ; 2 ; 3 et 4 dans le repère$(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

c) Calculer la distance M_1M_2 .

d)z_n peut-il être réel ?

Pour la suite de l' exercice on prendra u_1 = 1 .

2°)a)Donner la forme trigonométrique puis algébrique de $\frac{z_{n+1}}{z_n}$.

b)Exprimer alors z_{n+1} et $z_{n+1} - z_n$ en fonction de z_n .

c)En déduire la distance $M_{n+1}M_n$ en fonction de u_n .

3°)a)Démontrer que la longueur en cm de la ligne brisée $M_1M_2M_3.........M_nM_{n+1}$ est égale à $\sqrt{3}(2^n - 1)$

b)A partir de quelle valeur de n cette longueur est -elle supérieure à 1 km ?

Applications géométriques

15. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l' ensemble des points M d' affixe z tels que :

a) $|z-1| = |z-i|$; b) $|z+1+i| = \sqrt{2}$; c) $|i-z| = |iz-1|$; d) $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$.

16.1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

(E) $z^2 + 2z + 2 = 0$

2. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

(F) $z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$

Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

Résoudre l'équation (F).

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : a = - 1 + i, b = -1 - i, c = 2i, d = 2 - 2i.

3.a. Placer les points A, B, C, D.

3.b. Calculer les nombres complexes $\frac{c-a}{d-a}$ et $\frac{c-b}{d-b}$.

En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Transformations complexes

17. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1°)Montrer que tout nombre complexe z vérifie la relation :

$8z^4+8z^3-z-1=(z+1)(2z-1)(4z^2+2z+1)$.

En utilisant ce résultat, résoudre dans C , l' équation : $8z^4+8z^3-z-1=0$.

On désigne par z_0 la solution réelle négative, z_1 la solution réelle positive, z_2 la solution de partie imaginaire positive, z_3 la solution de partie imaginaire négative.

A_0, A_1, A_2, A_3 sont les images respectives de z_0, z_1, z_2, z_3.

2°)Mettre z_2 et z_3 sous forme trigonométrique et placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 dans le repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Démontrer que $A_0A_1A_2A_3$ est un losange.

3°)Montrer que le module de $\frac{z_2}{z_3}$ est égal à 1 et calculer un argument de $\frac{z_2}{z_3}$. Interpréter géométriquement ces résultats.

Quelles sont les images de A_1 et A_2 par la rotation de centre O et d' angle $-\frac{2\pi}{3}$?

Que peut-on déduire pour le triangle $A_1A_2A_3$?

18. A tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe : $f(z)=\frac{(3+4i)\bar{z}+4-8i}{5}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1°)On note A le point d' affixe $a=1+2i$. Déterminer les coordonnées du point A' d' affixe f(a).

2°)On note $z=x+iy$, x et y réels.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de f(z) en fonction de x et y.

En déduire l' ensemble Δ des points du plan complexe d' affixes z telles que $f(z)=z$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, placer A et A' et tracer Δ.

3°)Démontrer que Δ est la médiatrice de $[AA']$.

19.

Soient a et b deux nombres complexes non nuls.

Dans le plan affine euclidien, muni du repère orthonormal $(O, \vec{i},\vec{j})$,on appelle respectivement A et B les points d' images respectives a et b.

On pose $u=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}=r\,e^{i\theta}=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$.

1) On suppose u réel. Montrer que :

ou bien les points O, A, et B sont alignés

ou bien OA =OB

2) Si O, A et B sont alignés, u est-il réel ?

3) Si OA = OB , u est-il réel ?

20. *Amérique du nord 1999*

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i},\vec{j})$, l' unité graphique étant *4 cm*.

On considère les points A_0, A_1 d' affixes respectives $a_0=1$; $a_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Le point A_2 est l' image du point A_1 par la rotation de centre O et d' angle $\frac{\pi}{12}$

1.a.Calculer l' affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
b. Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l' affixe du point I
c. Faire une figure.
2.aProuver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondue.
2.bEcrire sous forme trigonométrique l' affixe de I ;
2.cDéterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées) sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère le points A d' affixe et pour tout θ appartenant a $[0\ ;\ 2\pi[$, le point M d' affixe $z = e^{i\theta}$.

21. *Asie Juin 1999*

1. Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^4 - 1$.
a) Factoriser P(z).
b) En déduire les solutions dans l' ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l' équation P (z) = 0, d' inconnue z.
c) Déduire de la question précédente les solutions deans $\mathbb{C}$ de l' équation d' inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (l' unité graphique est 5 cm).
a) Placer les points A, B, et C d' affixes respectives $a = -2$, $b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et $c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$
b) Démontrer que les points O, A, B, et C sont situés sur un cercle , que l' on déterminera.
3. Placer le point D d' affixe $d = -\frac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?