Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**
   On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

   Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

   Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :

$$\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\ (2\pi).$$

   Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3i$, et $\mathscr{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(O\ ;\ \vec{u}\right)$ des réels.
   - **a.** Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathscr{S}_1$. On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
   - **b.** Donner l'expression complexe de $\mathscr{S}_1$.

3. Soit $\mathscr{S}_2$ la similitude directe définie par :
   – le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4i$;
   – le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2i$.
   - **a.** Montrer que l'expression complexe de $\mathscr{S}_2$ est : $z' = iz + 1 + i$.
   - **b.** En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit $\mathscr{S}$ la similitude définie par $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$.
   Déterminer l'expression complexe de $\mathscr{S}$.

5. On pourra admettre désormais que $\mathscr{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = i\bar{z} + 1 + i.$$

   - **a.** Quelle est l'image de C par $\mathscr{S}$? Quelle est l'image de D par $\mathscr{S}$?
   - **b.** Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.
     Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.
   - **c.** Soit H' l'image de H par $\mathscr{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

Exercice 2

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation

$$(E) :\quad 8x - 5y = 3$$

   - **b.** Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
     Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \quad$ (modulo 40).
   - **c.** Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. Soit n un nombre entier naturel.
   - **a.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$(modulo 7).
     Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?

www.devoirat.net 2016

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 7)$.

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 3

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

   a. Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

   b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1\ 000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.
   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x.$$

   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

www.devoirat.net 2016

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \ \text{(F)}.$$

1. On suppose $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 32)$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1(\text{modulo } 5)$.

d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et $5i$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c. Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8 + 4i$ et $2 + i$.

a. Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.

b. Vérifier que $s(B') = A'$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. On note encore s la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.

a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. (On admet de même que Ω appartient au cercle de diamètre $[OB]$.)

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).

On note A' et B' les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.

a. Déterminer les images des droites (BB') et D par la similitude s.

b. Déterminer le point $s(B')$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

Bouzouraa Chaouki Lycée Secondaire ELKSOUR 2016 www.devoirat.net

Exercice 6

Sur la figure donnée en annexe, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.
2. Déterminer le rapport de cette similitude s.

On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.
4. Déterminer et placer l'image de C par s.
5. Soit Ω le centre de la similitude s.

a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.

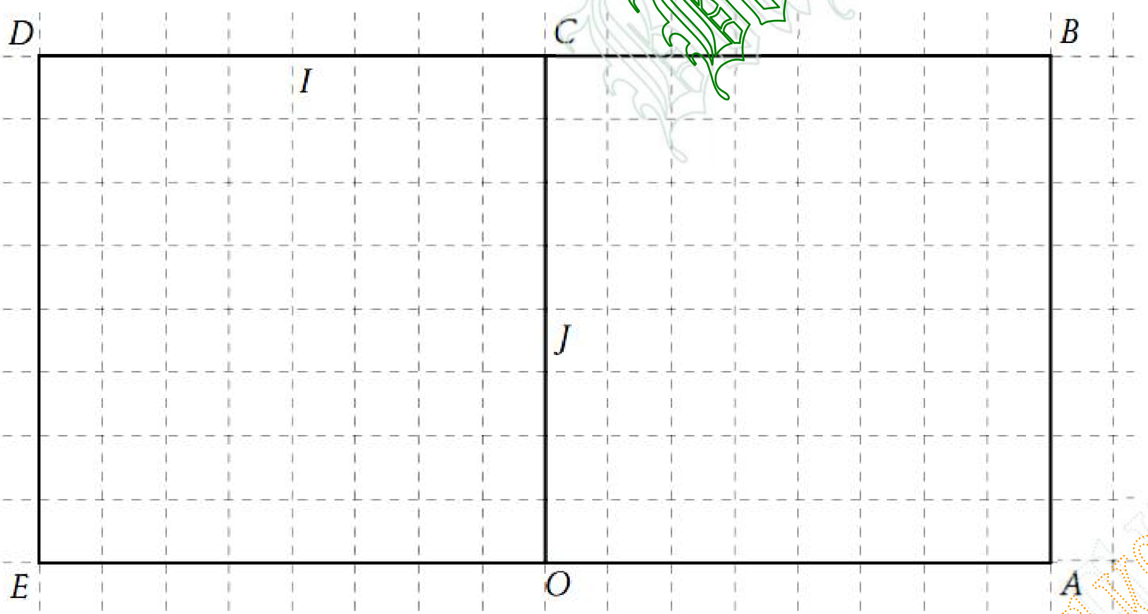
b. Montrer que Ω ne peut être le point H.

c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.



www.devoirat.net 2016