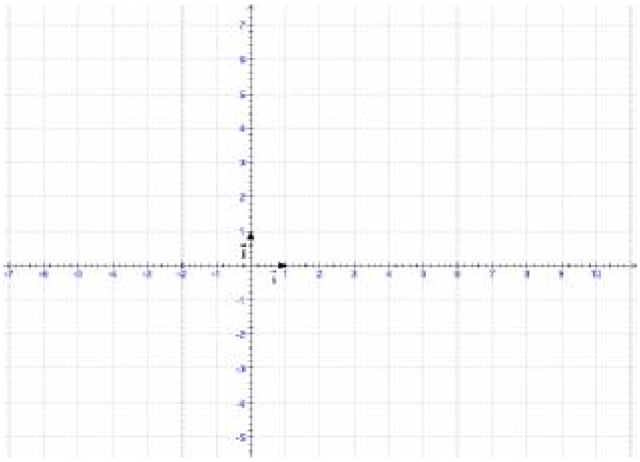
I. Approche de la notion :

Déterminer le domaine de définition et tracer la courbe représentative de la fonction f dans chacun des cas suivants :

<u>1ér cas :</u> $f(x) = 2x+1$.

$D_f =$

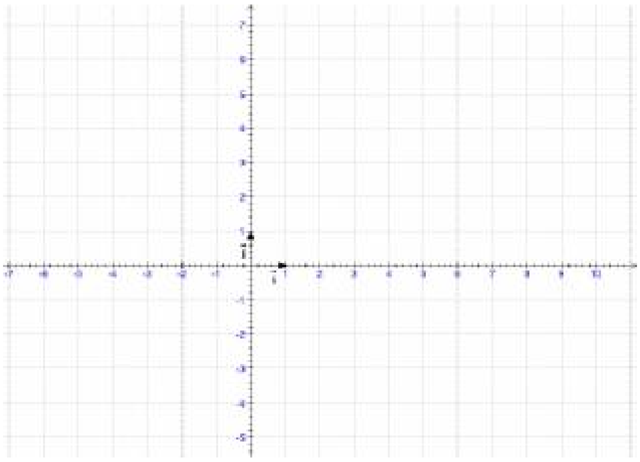
Courbe représentative :



<u>2ème cas :</u> $f(x) = |x|$.

$D_f =$

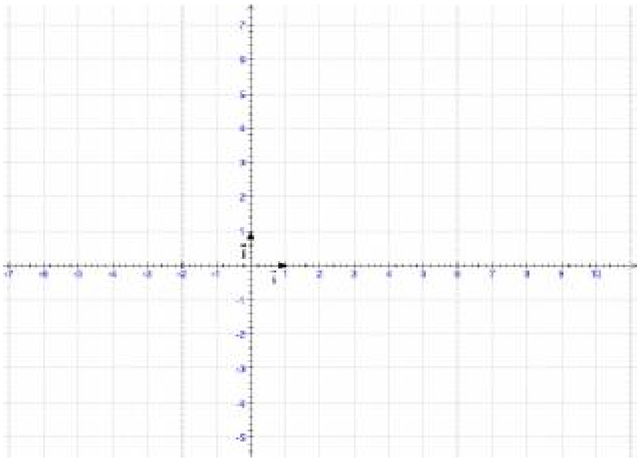
Courbe représentative :



<u>3ème cas :</u> $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 0 \\ 2x-1 & si\ x < 0 \end{cases}$.

$D_f =$

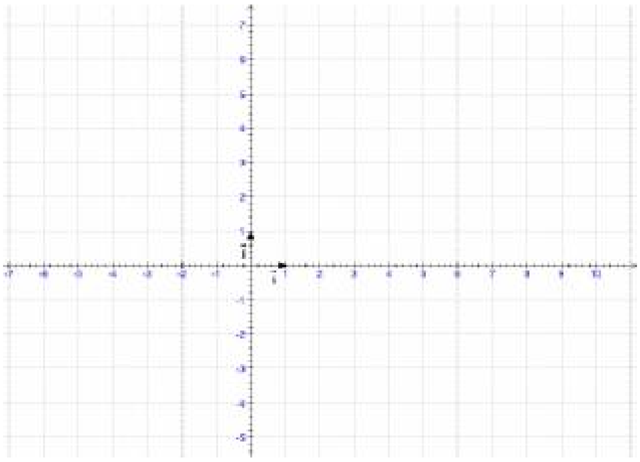
Courbe représentative :



<u>4ème cas :</u> $f(x) = E(x)$ appelée fonction partie entière.

$D_f = \mathbb{R}$.

Courbe représentative sur [-1,3] :



<u>Remarque :</u> Si x est un nombre réel, quelconque, il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous désignerons par $E(x)$.

Exemple : si $-1 \leq x < 0$ alors $E(x) = -1$.

Commentaires :

- Pour les deux premiers cas, la fonction est représentée par un trait continu (obtenu sans lâcher le crayon). La fonction considérée est dite une fonction **continue** en tout point de son ensemble de définition.
- Pour les deux derniers cas, la fonction est elle continue en tout point de son domaine de définition ?

………
………………………………………………………………………………

II. Fonction continue en un point :

Définition : Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lors que :

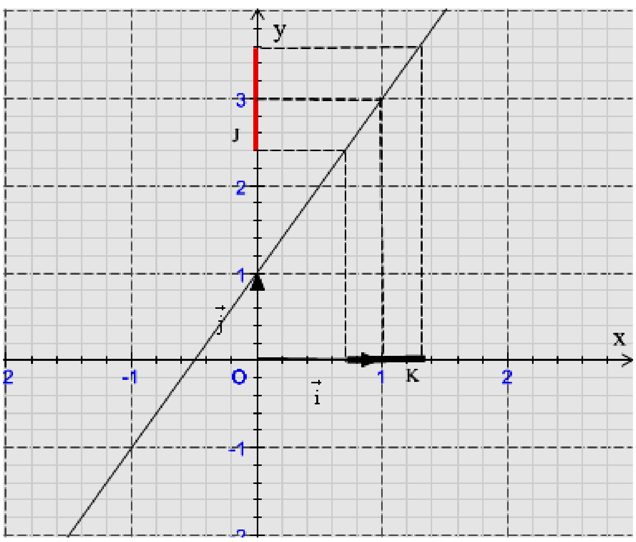
* quelque soit l'intervalle ouvert J centré en $f(a)$, il existe un intervalle ouvert K centré en a tel que pour tout x de I : $x \in K \Rightarrow f(x) \in J$.

* quel que soit $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout x de I : $|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta$.

Exemple :

Reprenons l'exemple du 1ér cas $f(x) = 2x+1$. Montrons que f est continue en 1.

La figure nous montre que $f(x)$ sera « voisin » de $f(1) = 3$ que l'on voudra, si l'on choisit x suffisamment « voisin » de1.



quel que soit $\beta > 0$ trouver $\alpha > 0$ tel que :

$|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \beta$.

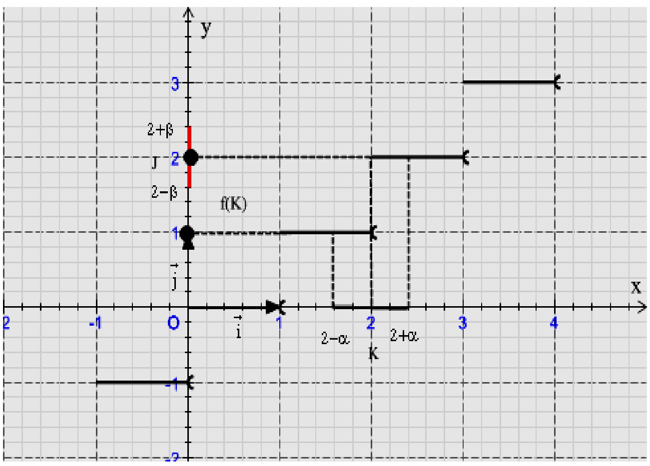
Nous cherchons à avoir $|f(x) - 3| < \beta$.

Pour tout x, on a :

$|f(x) - 3| = |2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1| < \beta$

Signifie $|x-1| < \frac{\beta}{2}$, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Pour l'exemple $f(x) = E(x)$:

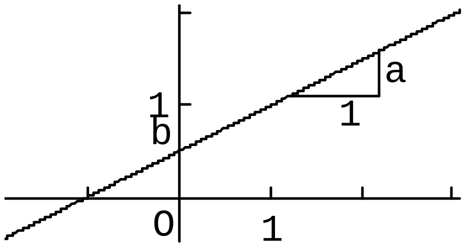


Choisissons β tel que $0 < \beta < 1$, quel que soit l'intervalle $K =]2-\alpha, 2+\alpha[$, $(\alpha > 0)$, de centre 2, $f(K)$ contient 1 qui est extérieur à $J =]f(2)-\beta, f(2)+\beta[$ ce qui signifie que f est discontinue au point $x_0 = 2$. Ce résultat est valable pour toutes les valeurs entières de x.

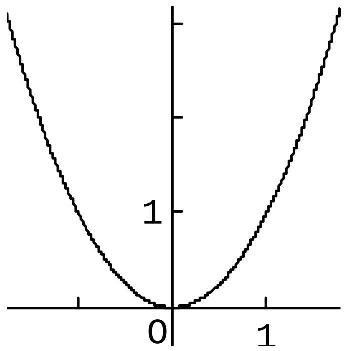
Graphiquement : chaque fois que x passe une valeur entière, le point figuratif $(x, f(x))$ saute d'un segment au segment suivant.

III. Continuité des fonctions usuelles :

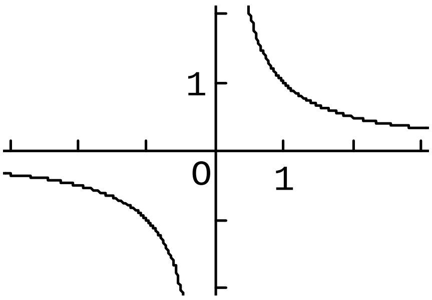
- Toute fonction affine $x \mapsto ax+b$ est continue en tout réel x_0.



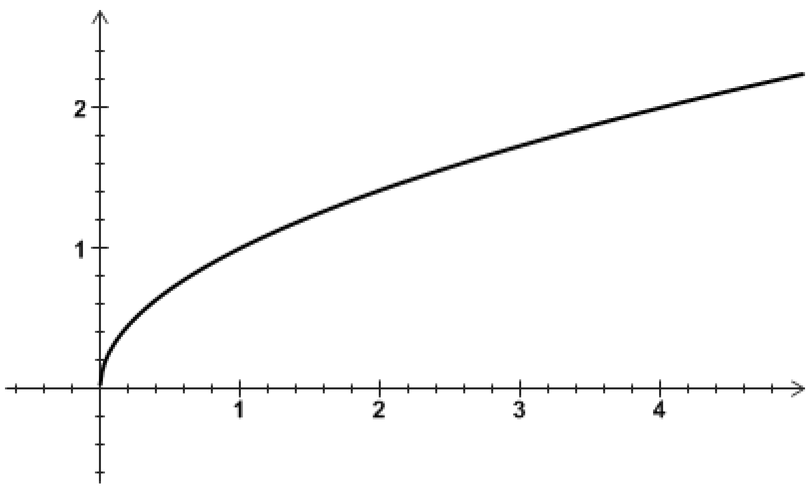
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel x_0.



- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul.



- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel positif x_0.



- Les fonctions polynômes sont continues en tout réel x_0 .
- Les fonctions rationnelles sont continues en tout réel où elles sont définies.

Activité 2 page 24.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

  Si f est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.

Activité 2 page 25.

IV. Opérations sur les fonctions continues :

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I et k un réel.

- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions f + g, fg, et kf sont continues en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors le fontion $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.
- Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Activité 1 page 25.

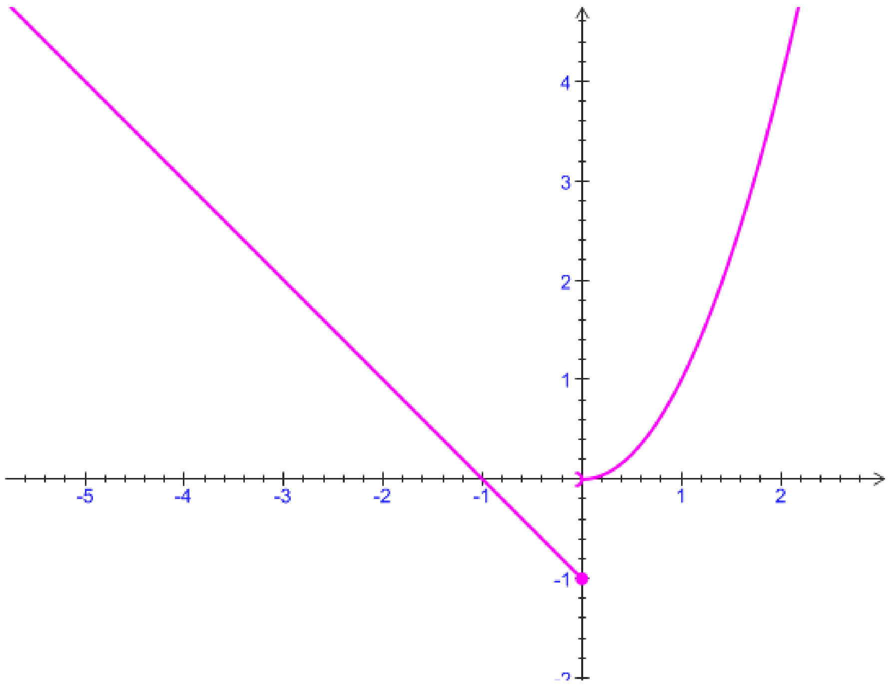
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

  Si f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Activité 3 page 26.

V. Continuité à droite, continuité à gauche :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.



- $f(0) = -1$.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à gauche (par des valeurs négatives), f(x) devient de plus en plus proche de $f(0) = -1$. On dit que f est continue à gauche en 0.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à droite (par des valeurs supérieures), f(x) devient de plus en proche de 0 qui est différent de f(0). On dit que f n'est pas continue à droite en 0 ou que f est discontinue à droite en 0.

  Dans ce cas f n'est pas continue en 0.

Théorème

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.

VI. Continuité sur un intervalle :

- Soient a et b finis ou infinis.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.

- Soit a fini ou infini et b un réel.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à gauche en b.

- Soit a un réel et b fini ou infini.

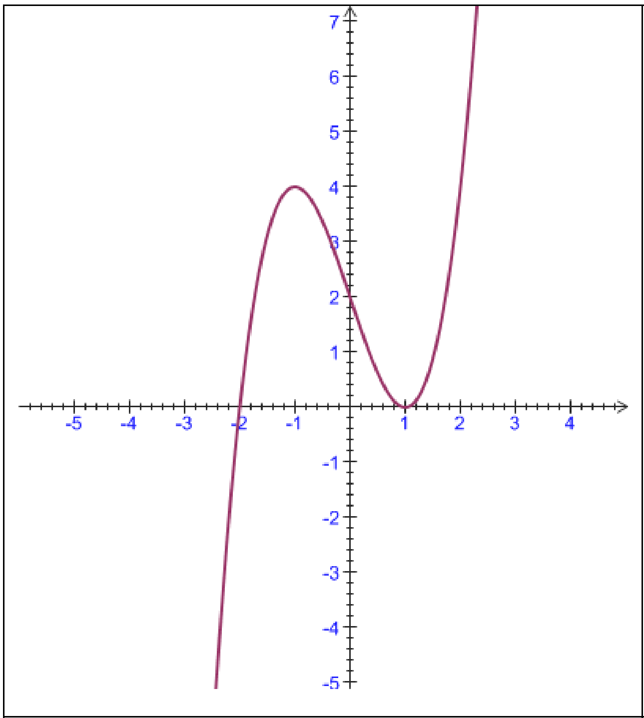
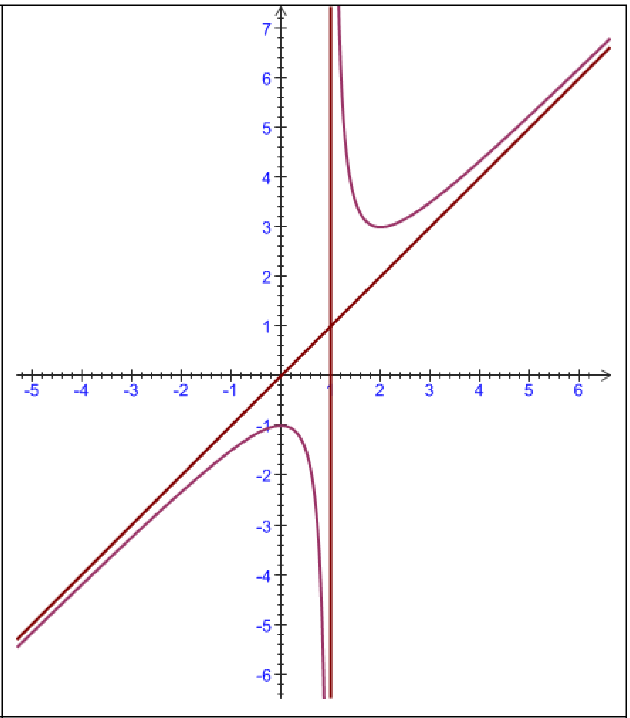
Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à droite en a.

- Soient a et b deux réels.

Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$,continue à droite en a et continue à gauche en b.

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

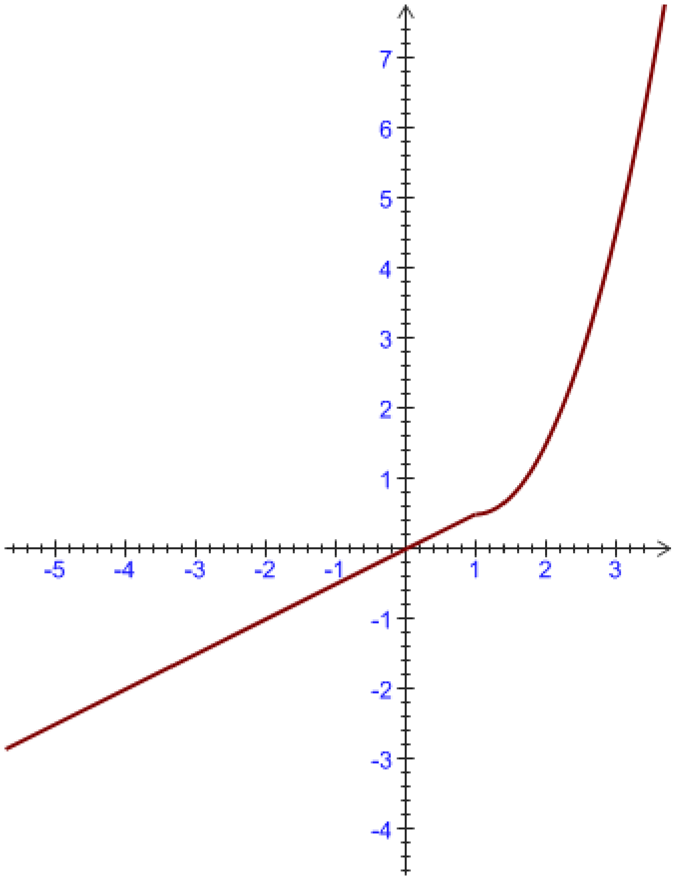
Exemples

	
$f(x) = x^3 - 3x + 2$ f est continue sur $\mathbb{R}$	$g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Activité 1 page 29.

$$\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ \boldsymbol{g}|_{]-\infty,1[} \text{ est une fonction linéaire} \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = ax \qquad \text{si } x < 1 \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Représentation graphique de g :



2) g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1 donc si x devient de plus en proche de 1 (à gauche ou à droite), g(x) devient de plus en proche de g(1) = 0.5.

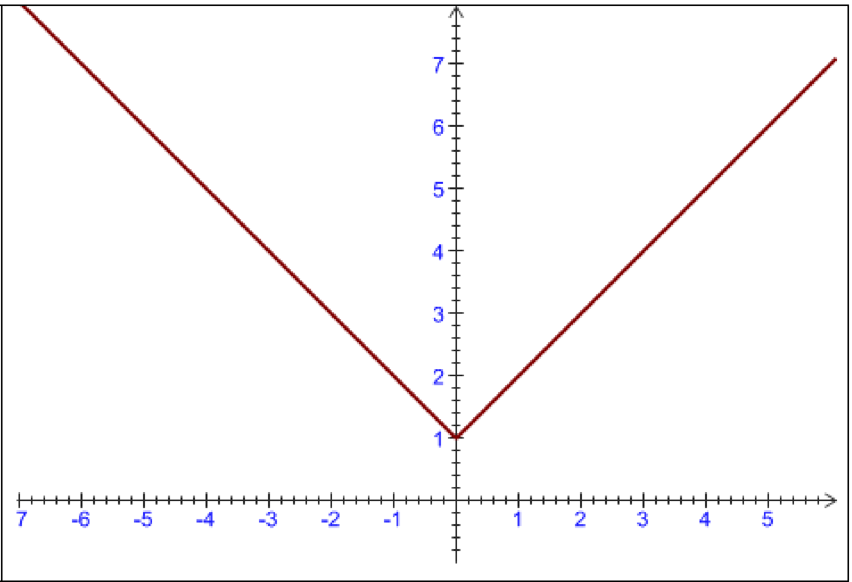
En tendant vers 1 à gauche, g(x) tend vers a donc a = 0.5

D'où $\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x \quad\quad\quad \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

Activité 2 page 29.

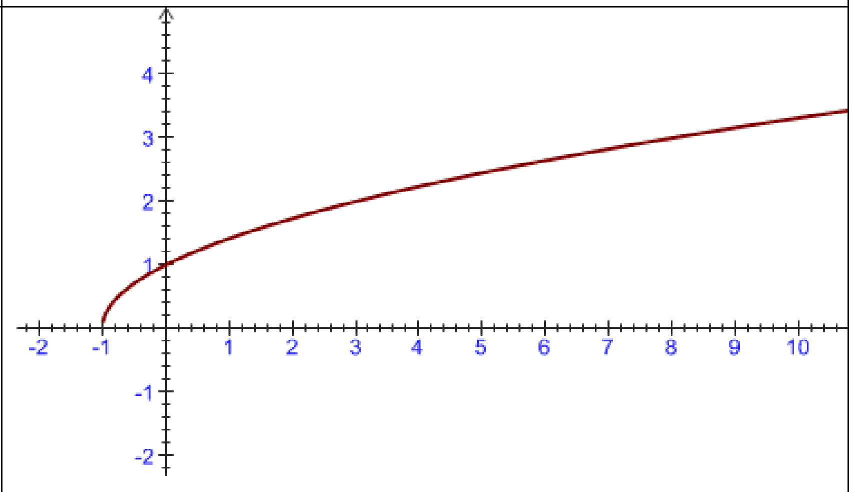
1) $f : x \mapsto |x| + 1$

f est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$



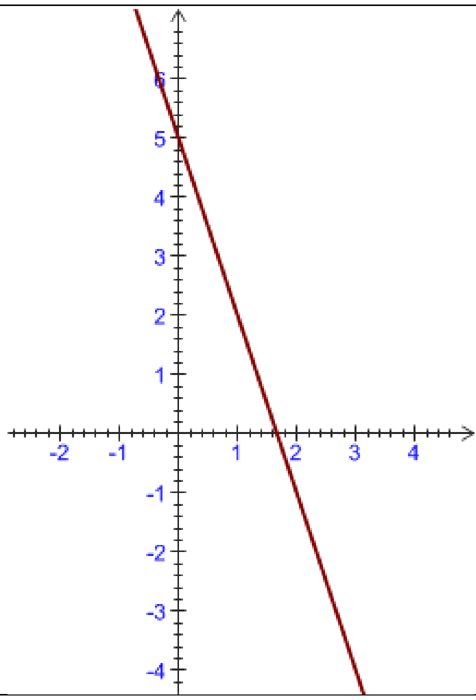
2) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

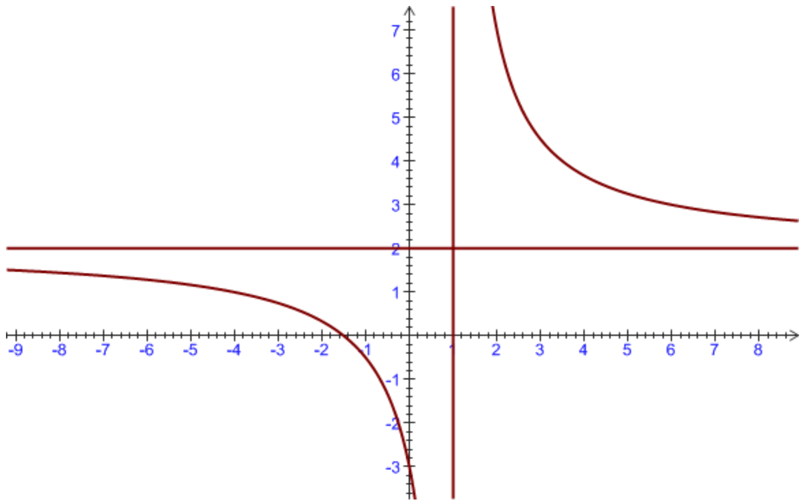
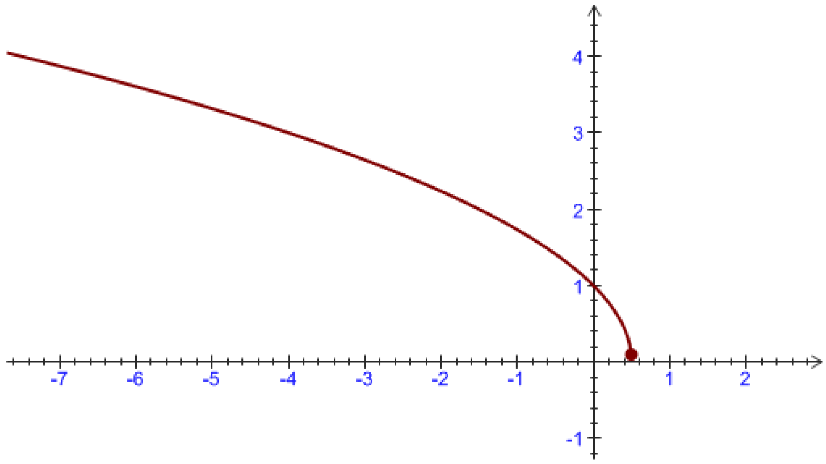
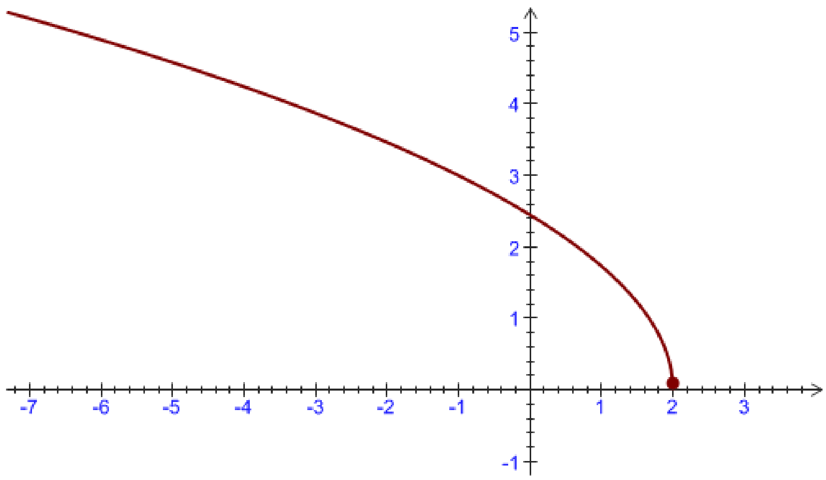
$\left(x \xrightarrow{u} x+1\right)$ est continue et positive sur $[-1, +\infty[$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $[-1, +\infty[$ en particulier sur [0, 1].

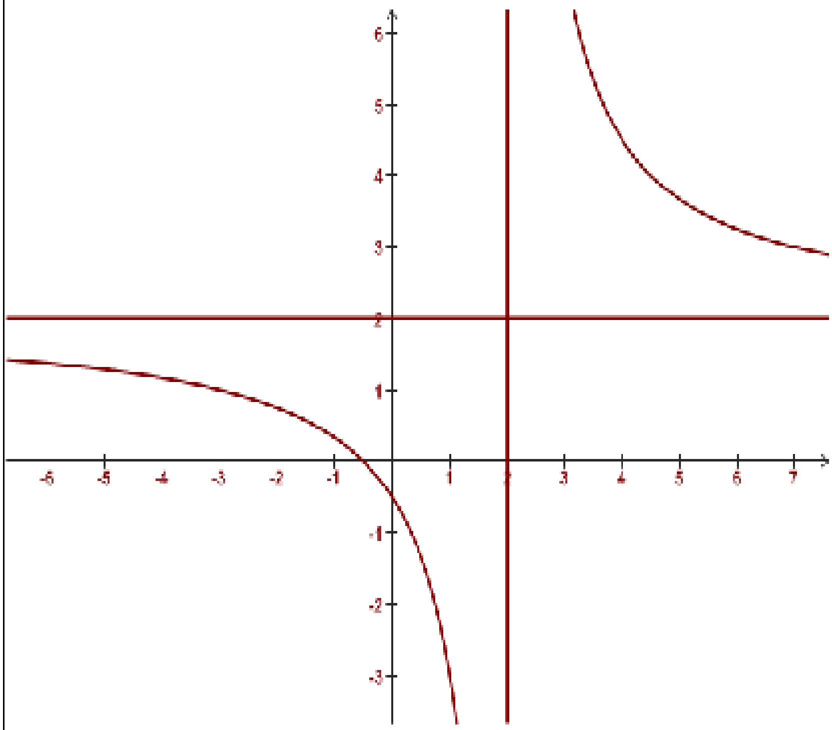


3) $f : x \mapsto -3x + 5$

f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur]-0.1 ; 10].



4) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en particulier sur [-1 , 0].	
5) $f : x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ $\left(x \xrightarrow{u} -2x+1\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ en particulier sur] -0.1 ; 0.3].	
6) $f : x \mapsto \sqrt{-3x+6}$ $\left(x \xrightarrow{u} -3x+6\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, 2\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, 2\right]$.	

7) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$ f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ en particulier sur] -2 ; 0 [.	

VII. Image d'un intervalle par une fonction continue :

<u>Activité 1 page 30.</u>

$f : x \mapsto (x-1)^2$.

1) f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$.
2) $f\left([2,+\infty[\right) = [1,+\infty[$; $f\left(]-0.2;0]\right) = [1;1.44[$

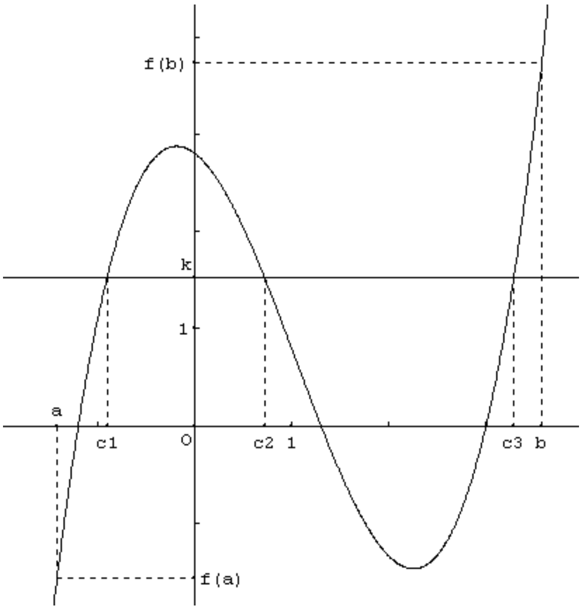
   $\{f(x)\ ;\ -0.5 \leq x \text{ et } x \neq 2\} = [0,+\infty[$.
3) $x \in [3,4] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq (x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow f(x) \in [4,9]$
4) L'équation f(x) = 5 admet d'après le graphique deux solutions : une solution α comprise entre -2 et -1 et une solution β comprise entre 3 et 4.

<u>Théorème</u>

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>

<u>Théorème 1:</u> Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], et si *k* est un réel quelconque situé entre f(*a*) et f(*b*) (ces deux valeurs comprises), alors il existe au moins un nombre *c* dans [*a* ; *b*] tel que f(*c*) = *k*.



Théorème 2 : Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle fermé [a ; b], alors pour tout réel k situé entre f(a) et f(b) (ces deux valeurs comprises), l'équation f(x) = k admet une **solution unique**.